FAMØS

FAMØS januar 2013
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Maria Bekker-Nielsen Dunbar (forside)

Deadline for næste nummer:
24. februar 2013

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

FAMØS er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 400 stk.
ISSN: 1903-2227

22. årgang, nr. 2, januar 2013

FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
22. årgang, nr. 2, januar 2013

Homage to FAMØS 22-2: Boromirean rings

Redaktion

- ⋆ Dalal El-Ghazzi,
- ⋆ Jens Siegstad,
- ⋆ Jingyu She,
- ⋆ Kristian Knudsen Olesen,
- ⋆ Kristian Peter Poulsen,
- ⋆ Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
- ⋆ Martin Patrick Speirs,
- ⋆ Nilin Abrahamsen,
- ⋆ Søren Wengel Mogensen

Indhold

Go, go, go

Søren Wengel Mogensen

Du har set Russell Crowe gøre det i *A Beautiful Mind*. Nu skal du gøre det i FAMØS.

Der er selvfølgelig tale om at spille go. Go er meget kort navn for et spændende spil. I bund og grund handler det om at omringe territorium og samtidig forhindre modstanderen i at gøre det. Det har ganske vist lige været jul, men i FAMØS deler vi gerne gaver ud hele året. Derfor får du her en kort introduktion til spillet, et gratis go-spil (hvis du har en saks) og lidt baggrund om spillet.

Hvad man må og ikke må

Go spilles af to spillere (sort og hvid), som på skift lægger en sten på et tomt kryds. I modsætning til skak er det sort, der starter. For c (se tegningen) er de tilstødende felter de fire felter med sorte brikker omkring den. For a er der kun tre tilstødende felter. Når en brik er lagt, kan den ikke flyttes til et andet sted på brættet. Derimod fjernes en brik helt fra brættet, hvis den eller den gruppe den er en del af ingen friheder (tilstødende tomme felter) har tilbage. Fx har har brik A og gruppen B kun én frihed tilbage hver, og sort kan altså erobre og fjerne disse brikker ved at placere en brik på a henholdsvis b. Brikker af samme farve udgør altså en gruppe, hvis de har kontakt med hinanden (enten er tilstødende, eller der er en sti via tilstødende, venligtsindede brikker).

Af påstand 4 samt definitionen af F_n, følger det at $F_n(0)$ og $F_n(\pi)$ er heltal. Dermed har vi at

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx = F_n(0) + F_n(\pi)$$

er et heltal, og dermed har vi den ønskede modstrid. Vi kan således konkludere at π er irrationalt. □

Litteratur

[1] Dan Beltoft og Klaus Thomsen. *Talfølger og -rækker. Introduktion til Matematisk Analyse.* Aarhus Universitet 2010.

[2] Ivan Niven *A simple proof that π is irrational.* Bulletin of the American Mathematical Society 53 (6) pp. 509.

[3] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*, Springer, Fourth Edition 2010.

følgende identitet

$$f_n(x) = f_n(\pi - x) \text{ for alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lad $x \in \mathbb{R}$. Da $a = b\pi$ har vi at

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(b\pi - bx)^n}{n!} \\ &= \frac{(bx)^n(\pi - x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

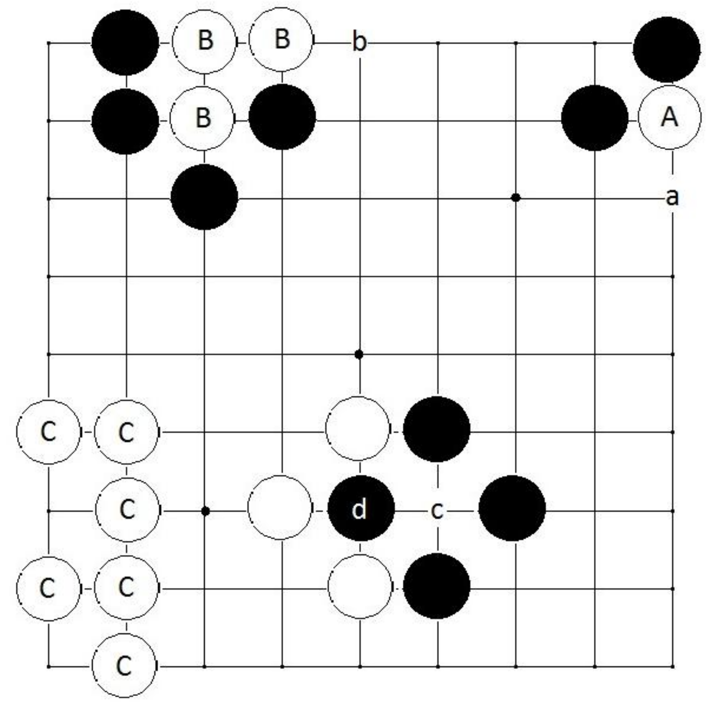
Heraf følger det at

$$\begin{aligned} f_n(\pi - x) &= \frac{(b(\pi - x))^n(\pi - (\pi - x))^n}{n} \\ &= \frac{\left(b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n x^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

og dermed har vi vist (1). Ved gentagen anvendelse af kædereglen er det rasende nemt at vise at $f_n^{(j)}(x) = (-1)^j f_n^{(j)}(\pi - x)$. Dermed er $f_n^{(j)}(0) = (-1)^j f_n^{(j)}(\pi)$, og heraf følger at $f_n^{(j)}(\pi)$ ligeledes er et heltal for ethvert $j \in \mathbb{N}$. □

Påstand 1 giver at der findes et $n \in \mathbb{N}$ således at

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx < 1.$$



Spillet slutter, når ingen spiller mener at kunne forbedre sin stilling mere. Der er forskellige måder at tælle point på, men én måde at gøre det på er at lægge de erobrede hvide brikker på hvids omringede felter, gøre det tilsvarende med sort og så ellers tælle tommer, omringede felter. Vinderen er den med flest af dem.

Der kan ud fra de regler, som er blevet ridset op indtil videre, opstå situationer, hvor de to spillere bliver ved med at skiftes til at tage hinandens brikker på de samme felter. Sådan en situation er opstået omkring c. Hvid kan spille på c, hvorefter sort kan erobre den hvide brik på c ved at placere en brik på d, hvorefter hvid kan spille på c igen osv. Det er derfor ikke tilladt at gentage en opstilling, der allerede har været på brættet én gang. Hvis hvid spiller på c, må sort derfor ikke umiddelbart spille på d, da dette ville give præcis den samme opstilling igen. Sort skal altså spille et andet sted, men må derefter spille på d, hvis hvid ikke har gjort det i mellemtiden. I den ovenstående situation kan man selvfølgelig spørge, hvorfor hvid overhovedet må spille på c. En hvid brik dér har jo ingen friheder, men det er et tilladt træk, da brikken på d samtidig erobres, og der skabes en frihed.

Man kan i go lave opstillinger som aldrig kan erobres. Sådan en opstilling er gruppen C.

Er det ikke bare skak, hvor man kun har bønder?

Go er interessant af flere årsager. Først og fremmest er det sjovt og en god udfordring. Dernæst er det spændende, at så simple regler giver et så komplekst spil. Det er efterhånden mange år siden, at Deep Blue slog den regerende verdensmester Kasparov i skak, men endnu har ingen kunnet lære en computer at spille bare tilnærmelsesvis op med professionelle go-spillere. Der er simpelthen for mange mulige trækkombinationer, til at ren regnekraft endnu har kunnet overmande de dygtigste menneskelige spillere. Man skal nemlig have intuition og overblik for at spille go, og go er derfor en stor udfordring og kilde til inspiration, når man vil lære computere at tænke mere som mennesker.

Nu skal du finde saksen frem, finde en makker at spille med, og så vil du snart forstå, hvorfor kineserne har spillet go i årtusinderne. Længere fremme i bladet finder du nemlig et spil - lige

Påstand 4
Der gælder at $f_n^{(j)}(0)$ og $f_n^{(j)}(\pi)$ er et heltal for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

Bevis. For at vise ovenstående omskriver vi udtrykket for f_n ved at benytte binomialformlen:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j x^j \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j x^{j+n} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n}\binom{n}{j-n}a^{2n-j}(-b)^{j-n}x^j \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n}c_j x^j \end{aligned}$$

hvor

$$c_j = \binom{n}{j-n}a^{2n-j}(-b)^{j-n}.$$

Det ses af ovenstående at hvis vi differentierer f_n mindre end n gange, fås et polynomium uden konstantled. Dermed har vi at $f_n^{(j)}(0) = 0$ for $j < n$. Hvis $j > 2n$, har vi at $f_n^{(j)} \equiv 0$, og specielt har vi at $f_n^{(j)}(0) = 0$. Differentierer vi f_n j gange hvor $n \le j \le 2n$, fås netop ét konstantled, og heraf følger det at $f_n^{(j)}(0)$ er lig med dette konstantled. Vi finder at $f_n^{(j)}(0) = \frac{j!c_j}{n!}$, og da $j \ge n$, er dette tal et heltal. For at vise at $f_n^{(j)}(\pi)$ er et heltal, får vi behov for

Påstand 3
Funktionen $x \mapsto F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)$ er en stamfunktion til $x \mapsto f_n(x)\sin(x)$, og der gælder at

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx = F_n(0) + F_n(\pi).$$

Bevis. Vi finder at

$$\begin{aligned}(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x))' &= F_n''(x)\sin(x) + F_n'(x)\cos(x) \\ &\quad - F_n'(x)\cos(x) + F_n(x)\sin(x). \\ &= \sin(x)\left(F_n''(x) + F_n(x)\right).\end{aligned}$$

Vi simplificerer nu $F_n''(x) + F_n(x)$.

$$\begin{aligned}F_n''(x) + F_n(x) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_n^{(2i+2)}(x) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_n^{(2i)}(x) \\ &= \left(f_n^{(2)}(x) - f_n^{(4)}(x) + f_n^{(6)}(x) + \cdots (-1)^n f_n^{(2n+2)}\right) \\ &+ \left(f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) + \cdots (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right) \\ &= f_n(x)\end{aligned}$$

idet $f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ da f er polynomium af grad $2n$. Dermed har vi at $(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x))' = f_n(x)\sin(x)$ som ønsket. Vi finder nu at

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx &= \Big[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\Big]_0^\pi \\ &= F_n(0) + F_n(\pi)\end{aligned}$$

som ønsket. $\square$

til at klippe ud. De normale størrelser for go-spil er 9x9, 13x13 og 19x19. Her får du et bræt i 9x9.

Man gør man herfra?

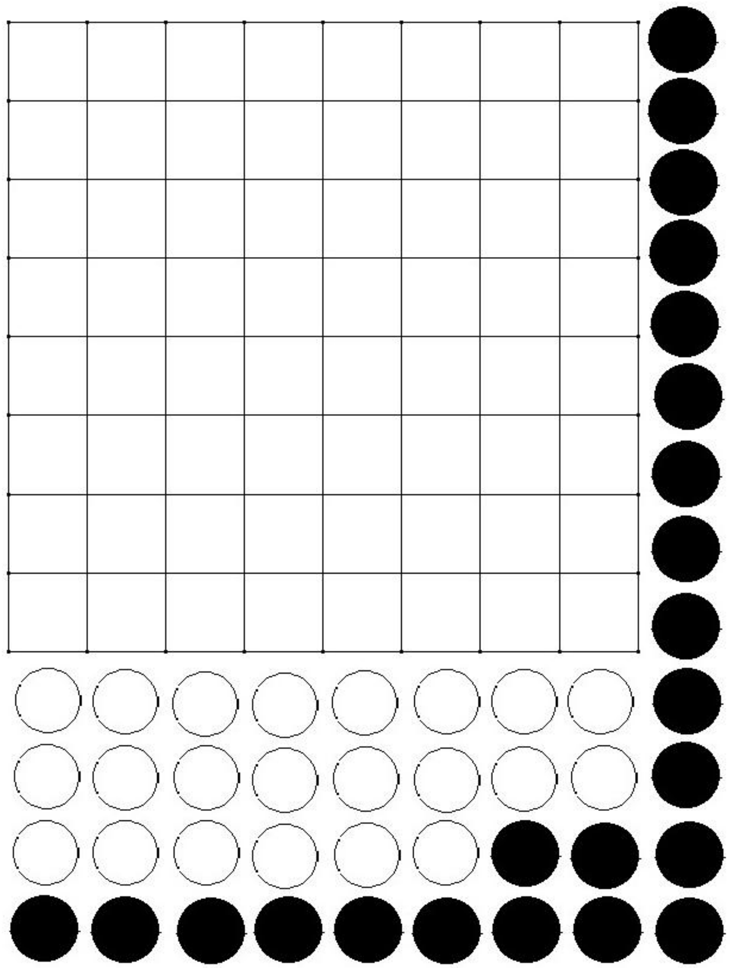
Københavns Universitet har faktisk en nystiftet go-klub, som er åben for alle lige fra nybegyndere til habile spillere. I januar spilles der om fredagen kl. 13 på gangen med øvelseslokaler i stueetagen af DIKU. Mere information kan fås ved at skrive til stifteren af klubben, Jannik, på jannikgram@ishoejby.dk.

Litteratur

[1] Peter Shotwell. *Go Basics*

[2] Peter Shotwell. *Go! More Than a Game*

[3] William S. Cobb. *The Book of Go*



Påstand 2
Der gælder at

$$\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Bevis. Husk at den naturlige eksponentialfunktion har rækkefremstillingen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

og ovenstående rækkefremstilling er gyldig for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Vi har således at $\frac{\pi^n a^n}{n!}$ er det $(n+1)$'te led i den konvergente række

$$e^{\pi a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

og dermed har vi at $\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$. □

Ved at benytte ovenstående observationer kan vi konkludere at integralet $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx$ er positivt men mindre end $\pi \frac{\pi^n a^n}{n!} = \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$ som konvergerer mod 0 for $n \to \infty$ ifølge Påstand 2. Vi vil i det følgende vise at vores antagelse om at π er rational medfører at dette integral er et heltal, hvorved vi opnår den ønskede modstrid. Vi definerer nu funktionen $F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_n^{(2i)}(x)$$

hvor $f_n^{(j)}$ betegner den j'te afledede af f_n.

Tallet π er irrationalt

Jens Siegstad

At tallet π er irrationalt har været kendt i pænt lang tid. Aristoteles postulerede det da han påstod at diameteren og radius i en cirkel er inkommensurable størrelser ([3]). Der skulle gå over 2000 år før Aristoteles' påstand blev bevist! I 1768 gav den schweiziske matematiker Johann Heinrich Lambert som den første et bevis for irrationaliteten af π. Vi skal i denne artikel se det elegante bevis som den canadisk-amerikanske matematiker Ivan Niven gav i 1946.

Sætning 1 *Tallet π er irrationalt.*

Bevis. Antag for modstrid at π er rational. Da kan vi finde naturlige tal a og b således at $\pi = \frac{a}{b}$. Lad n være et naturligt tal, og definer funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

Påstand 1
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og for $0 < x < \pi$ gælder at

$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Bevis. Da $x > 0$ har vi at $bx > 0$, og dermed har vi at $0 < a - bx < a$, og således gælder at $0 < (a-bx)^n < a^n$. For $0 < x < \pi$ gælder at $0 < \sin(x) \leq 1$. Ved at benytte disse uligheder finder vi at

$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

$\square$

Skuffeprincippet

Søren Wengel Mogensen

Blokkens side 9-sætning er en lille fiks sag med et meget simpelt bevis, der i og for sig blot er en opfindsom anvendelse af noget så velkendt som skuffeprincippet.

Sætning 1

Lad $a_1, ..., a_n$ være n heltal, som ikke nødvendigvis er forskellige fra hinanden. Da findes altid nogle på hinanden følgende tal $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_l$, således at $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ er et multiplum af n.

Bevis

Lad $S = \{0, 1, ..., n\}$ og $R = \{0, 1, ..., n-1\}$ og definér $f : S \to R$ ved at $f(k)$ er resten af $\sum_{i=1}^{k} a_i$ ved division med n. Bemærk, at vi lader $f(0) = 0$. Det ses, at $|S| > |R|$, og der må altså ved brug af skuffeprincippet findes $l_1, l_2 \in S, l_1 < l_2$, så $\sum_{i=1}^{l_1} a_i$ og $\sum_{i=1}^{l_2} a_i$ giver samme rest ved division med n. Så kommer vi frem til, at

$$\sum_{i=l_1+1}^{l_2} a_i = \sum_{i=1}^{l_2} a_i - \sum_{i=1}^{l_1} a_i$$

har rest 0 ved division med n. $\square$

Litteratur

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*

Sådan smager dit nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Farver er godt, og farver i drinks er endnu bedre. I denne udgave giver vi dig en guide til, hvor du og veninderne kan tage hen på den ultimative girls night out. Og er man ikke til drinks og tænker: Øv, så er der ingen gastronomiske tips til mig i denne omgang, så fat mod! Burger, fritter og cola skal der naturligvis også være plads til. Alt i alt en bytur, der hurtigt bliver farlig og en redning til dagen derpå.

Vibes Apotek, ★★★★☆

Der er drinks i lange baner og sød betjening på *Vibes Apotek* på Ydunsgade 5. Baren holder åbent torsdag-lørdag fra 19.30-24, og vi erfarede, at det godt kan betale sig at komme lidt tidligt på aftenen. Baren er velbesøgt og det med god grund. Konceptet lyder på drinks mikset af forskellig slags spiritus og diverse sirupper. Navne som *sort mælk*, *zlumumba* og *gæt en is* siger ikke nødvendigvis meget om, hvad man egentlig får i sin drink, men der er hjælp at hente fra det søde personale bag baren. Desværre er *ladies night* ikke længere en torsdagsevent i baren, og man kommer derfor hurtigt til at betale godt for en festlig aften. Prisen for en drink er mellem 25 og 60 kr., men det opvejes heldigvis af den hyggelige stemning, som skabes af lokalernes udsmykning med tæpper på væggene, afrevet tapet og hyggelige sofaer, hvor gæsterne kan slænge sig, lige så tosset de vil. Tosset kan man også hurtigt blive af de baloner med lattergas, som til den lette sum af 20 kr., hurtigt får smilet frem. Vi oplevede sågar lidt ekstra loungestemning i form af DJ i barens bagerste gemakker. Du kan derfor roligt tage veninderne under armen og få en på opleveren,

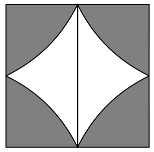
Lad $M := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2x}\}$, da udregner vi areal M som et dobbeltintegral:

$$\begin{aligned}\text{areal}(M) &= \int_{[0,1]^2} 1_M \; d\mu = \int_M 1 \; d\mu = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2x}}^1 1 \; dy \; dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - \frac{1}{2x} \; dx = \Big[x - \tfrac{1}{2}\log(2x)\Big]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= (1 - \tfrac{1}{2}\log 2) - (\tfrac{1}{2} - 0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2.\end{aligned}$$

Sandsynligheden for at vi kan danne en trekant af de opdelte stykker, kan så udregnes til

$$\begin{aligned}P((X,Y) \in A) &= \text{areal}(A) = 1 - \text{areal}(B) = 1 - 4\,\text{areal}(M) \\ &= 1 - 4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2) = 2\log 2 - 1 \simeq 0{,}386.\end{aligned}$$

Figur 2 Mængden B af ugunstige udfald



$(1-Y)\max(X,1-X)\ell \geq \frac{1}{2}\ell$. Mængden B kan således beskrives ved

$$\begin{aligned}
B =& \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x = \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y\max(x,1-x) \geq \tfrac{1}{2}\} \\
&\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (1-y)\max(x,1-x) \geq \tfrac{1}{2}\} \\
=& \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x = \tfrac{1}{2}\} \\
&\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \leq \tfrac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2(1-x)}\} \\
&\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2x}\} \\
&\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \leq \tfrac{1}{2}, 1-y \geq \frac{1}{2(1-x)}\} \\
&\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, 1-y \geq \frac{1}{2x}\}.
\end{aligned}$$

Foreningen er disjunkt bortset fra de fire punkter $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ og $(0, \pm\frac{1}{2})$ – se figur 2.

Mængden $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x = \frac{1}{2}\}$ er et linjestykke og har areal nul. De resterende fire mængder fremkommer af hinanden ved spejling i linjerne $x = \frac{1}{2}$ og $y = \frac{1}{2}$, så de har samme areal. Der gælder derfor

$$\text{areal}(B) = 4 \cdot \text{areal}\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \geq \tfrac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2x}\}.$$

for som *Vibes Apotek* siger det, så er bitter ikke noget, man er - det er noget, man drikker for ikke at blive det!

The Bronx, ★★★★★★

Farlige drinks kan hurtigt give de der tømmermænd og hvilken bedre måde at afhjælpe sådanne end med burger og cola (sidstnævnte adlibitum). På *The Bronx* på Nørrebrogade 114 er de specialister i lige netop burger, og hvad der dertil hører. Menukortet byder på ti forskellige af slagsen (og lidt nachos, kaffe og sådan), og alle koster de 89 kr. inkl. valgfri tilbehør og dyppelse. Hvis du er ekstra sulten, kan du dog for en 20'er ekstra få en *MEAT FEAST XL*, men så skal du også have den store sult med dig. Bronx laver nemlig ikke burger for børn. Burgerbollerne er sprøde og lækre, og fritterne er heller ikke til at klage over. Tværtimod! Hvis du tror, at det stopper ved fantastisk tømmermændsmad, så tager du fejl. *The Bronx* har nemlig også et smart studierabatsystem. Du får udleveret et lille kort, hvor rabatten indsættes, og på den måde kan man spare sammen til mad ved at købe det og samtidig få rabat. På kortet indsættes 30 kr. ved køb af den første burger, og du vil hver gang få en sms med saldo på din burgerkonto. Det er smart! Vi vil varmt anbefale en tur forbi *The Bronx*, men er du sulten efter burger i din frokostpause, så skal du nok ringe og bestille i forvejen. Der er nemlig ikke travlt bag disken, men det er ventetiden værd. Så hvad venter du egentlig på?

Forsikringsprodukter
– Et åbent brev til forsikringsmatematikstuderende

Jingyu She

Kære læser. Jeg vil i nedenstående antage, at du regner med en dag at arbejde i et forsikringsselskab. Måske kommer du til at regne på, hvor mange penge der skal sættes hen i reserven, for at kunderne kan få udbetalt deres erstatning. Det kan også tænkes, at du laver stokastiske modeller til analyse af genforsikringsstrategier eller kapitalkrav. [1]

Efter at have læst ovenstående tænker du måske: *Arbejdet kræver, at jeg kan modellere og jonglere med tal. Godt, at jeg bliver dygtig til matematik.* Eller måske tænker du: *Hvad er en reserve? Hvad er genforsikring, og hvad betyder kapitalkrav?*[2] Let's face it: det er godt at kunne lave modeller, men det er endnu vigtigere at forstå, hvad vi modellerer og motivationen bag. En model, der giver mening i forbindelse med ulykkesforsikring, kan måske ikke bruges til at modellere tab-af-erhvervsevne-forsikringer. [3]

Heldigvis har vi i vore dage den store Google-guru til at få svar på "Hvad er-spørgsmål. Wikipedia og Finanstilsynets hjemmeside kan være god hjælp for nysgerrige sjæle. De forskellige forsikringsselskabers hjemmesider giver en del information omkring forsikringsprodukter. Men desværre er terminologien så farverig, at den ofte er forskellig på tværs af hjemmesiderne. Det kan være

[1] Hvis Solvens II-direktivet nogensinde når at blive implementeret i dansk lovgivning, får du masser at lege med.

[2] Det skal lige nævnes, at du primært vil finde interesse i denne artikel, hvis du læser på første eller andet år og endnu ikke har fået studierelevant job. For alt det lærer man om på jobbet eller starten af tredje år.

[3] Nu er du måske bekymret, fordi du ikke har lært om forskellen mellem disse forsikringstyper.

Løsning af den supplerende opgave

Den stokastiske variabel $X \in [0,1]$ antages stadig at være ligefordelt, og det første snit på pinden lægges i $X \cdot \ell$ som før.

Nu skal vi så være lidt forsigtige, idet andet snitpunkt kun må placeres på det længste af de to stykker. De to stykker vil have længderne $X\ell$ og $\ell - X\ell$. Det længste stykke vil derfor have længde

$$\max(X\ell, \ell - X\ell) = \max(X, 1-X)\ell;$$

og det korte stykke vil altid have længde højst $\frac{1}{2}$ og opdeles ikke yderligere.

Lad nu $Y \in [0,1]$ betegne den relative placering af andet snitpunkt langs linjestykket af længde $\max(X, 1-X)\ell$. $Y \in [0,1]$ er altså den relative placering af andet snitpunkt langs det længste af de første stykker; Y er derfor per antagelse ligefordelt på $[0,1]$ *uafhængigt* af hvilken værdi X antager. Det andet snitpunkt placeres så i punktet $Y \cdot \max(X, 1-X)\ell$ langs linjestykket af længde $\max(X, 1-X)\ell$.

Når vi opdeler stykket $\max(X, 1-X)\ell$ i det andet snitpunkt, får vi så to stykker af længde $Y\max(X, 1-X)\ell$ og $(1-Y)\max(X, 1-X)\ell$.

Da fordelingen af Y er uafhængig af X, vil (X, Y) endnu engang være ligefordelt på $[0,1]^2$. Vi lader igen $A \subseteq [0,1]^2$ være mængden af udfald hvor vi *kan* danne en trekant, og vi vil igen i stedet bestemme arealet af komplementet $B := [0,1]^2 \setminus A$.

Hvis $X = \frac{1}{2}$, vil begge de to første stykker have længde $\frac{1}{2}\ell$, så vi kan ikke danne en trekant uanset placeringen af andet snit. Vi har altså $\{\frac{1}{2}\} \times [0,1] \subseteq B$.

For $X \neq \frac{1}{2}$, vil det korte af de to første stykker have længde mindre end $\frac{1}{2}\ell$. Den eneste måde hvorpå vi kan få et stykke af længde mindst $\frac{1}{2}\ell$ vil altså være hvis $Y\max(X, 1-X)\ell \geq \frac{1}{2}\ell$ eller ening (se figur 1). Vi får derfor at

$$\begin{aligned}\mathrm{areal}(B) =& \mathrm{areal}\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x,y\le \tfrac{1}{2}\}\\ &+\mathrm{areal}\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x,y\ge \tfrac{1}{2}\}\\ &+\mathrm{areal}\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x-y\ge \tfrac{1}{2}\}\\ &+\mathrm{areal}\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y-x\ge \tfrac{1}{2}\}\\ =&\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Svaret på opgaven bliver så

$$P((X,Y)\in A) = 1 - P((X,Y)\in B) = 1 - \mathrm{areal}(B) = \tfrac{1}{4}.$$

svært at danne sig et overblik. Så til dig, der godt vil tage til den første jobsamtale og præstere med noget mere end definitionen af en stokastisk variabel, kan jeg anbefale følgende:

Tag på biblioteket og lån samtlige bøger hjem, som er udgivet af ***Forsikringsakademiet***[4].

Et godt sted at starte er den introduktoriske bog "Grundlæggende forsikringslære"af Claus Bache. For at se en liste over nyeste udgaver [5] kan læseren besøge siden:
`http://www.forsikringsakademiet.dk/boghandel/kategori/start/`.
Desuden kan jeg varmt anbefale den letlæste beretning *Tykke og Behag: Om grundlaget for forsikring*, skrevet af den nu pensionerede aktuar Paul Johansen.

[4] Tidligere Forsikringshøjskolen

[5] Idet lovgivningen ændrer sig løbende, kan det være en god ide at læse den senest opdaterede udgave. Ellers kan man risikere at sidde med en bog fra 90'erne, der beretter om "en ny forsikringsform, hvor privatpersoner kan få dækket deres hospitalsudgifter på privathospitaler". Af samme grund kan det ikke betale sig at købe bøgerne hjem, da de er hurtigt læst og grundet samfundets udvikling kun har relevans inden for de næste fem år.

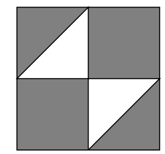
Matematik og magi
– eller "Næste stop Las Vegas"

Rasmus Sylvester Bryder

Da jeg var mindre, morede jeg mig ofte når min halvfætter Casper viste mig korttricks. Det trick han viste mig oftest, var et hvor han havde 21 kort, bad mig om at vælge et, og derpå lagde kortene ud i systematiske bunker tre gange, dernæst samlede dem op og lavede fire blomster, hver ud af fem kort, fravalgte kronblade og blomsterbunde og til sidst viste mig det kort, som jeg havde valgt. Jeg havde på ingen måde nogen idé om hvordan han kunne gætte hvilket kort jeg havde udvalgt i en bunke på 21 kort. Han lærte mig at lave det selv, og jeg endte med at låne flere bøger på det lille bibliotek på min folkeskole om kort- og terningetricks. Når jeg tænker tilbage på det, var der overraskende mange tricks i disse, der var umanerligt dårlige, men det er der også en grund til: mange af bøgerne var rettet imod læsere omkring tiårsalderen, og når man viser børn "magi", skal der, og undskyld min fordom, nok ikke meget til at forbløffe dem. Min interesse i magi i den alder blev skærpet af TV-showet *David Blaine: Street Magic* som blev vist på TV2 en årgang; navngiveren til programmet chokerede gang på gang folk ved at levitere på åben gade, stikke sin arm igennem ruden til en juvelérbutik og stjæle et ur eller lave korttricks på italienske restauranter. Siden showet blev taget af, har jeg nærmest ikke skænket kortmagi en tanke, med visse uvurderlige undtagelser, heriblandt en gribende optræden fra en bekendt til en nytårsfest.

Mange gode korttricks, som udelukkende handler om kortenes fordeling, er selvfølgelig slet ikke magiske, men bygger på noget af det simpleste matematik, man kan forestille sig – aritmetik. Efter min mening forsvinder magien en smule fra sådanne tricks, fordi

Figur 1 Mængden B af ugunstige udfald



bestemme arealet af A, men vi vil i første omgang betragte komplementet $B := [0,1]^2 \setminus A$ i stedet. B består af de par (X, Y) hvor det længste stykke har længde mindst $\frac{1}{2}\ell$, og dette kan finde sted på tre måder:

Såfremt $X, Y \leq \frac{1}{2}$, vil begge snitpunkter opfylde $X\ell, Y\ell \leq \frac{1}{2}\ell$, så pinden bliver delt højst halvvejs oppe. Det øverste stykke får dermed længde mindst $\frac{1}{2}\ell$.

Tilsvarende hvis $X, Y \geq \frac{1}{2}$, bliver pinden delt mindst halvvejs oppe; så det nederste stykke får længde mindst $\frac{1}{2}\ell$.

Til sidst er det en mulighed at det midterste stykke får længde mindst $\frac{1}{2}\ell$. Det midterste stykke har altid længde $|X - Y|\ell$, så vi skal altså have $|X - Y| \geq \frac{1}{2}$ hvis det midterste stykke skal være for langt.

Samlet set får vi at mængden B af ikke-gunstige udfald er givet ved

$$B = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x, y \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x, y \geq \tfrac{1}{2}\}$$
$$\cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x - y \geq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y - x \geq \tfrac{1}{2}\}.$$

Bortset fra fem enkeltpunkter[11], er ovenstående en disjunkt for-

[11] Hvilket er en nulmængde.

Knæk og bræk

– Løsninger til sidste bloks opgaver

Sune Precht Reeh

Jeg antager som udgangspunkt at pinden i opgaverne er uden tykkelse og er formet som et ret linjestykke af længde ℓ.

Antag at pinden er blevet delt i tre segmenter af længde $a \leq b \leq c$, sådan at $a+b+c=\ell$. De tre stykker vil kunne samles til en trekant hvis og kun hvis *trekantsuligheden* $c < a+b$ er opfyldt (hvor c er det længste stykke). Der gælder $c < a+b$ hvis og kun hvis

$$c < \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}\ell.$$

Da c er det længste stykke, er det således nødvendigt og tilstrækkeligt at alle tre stykker er mindre end $\frac{1}{2}\ell$.

Løsning af præmieopgaven: Famøs årgang 22, nr. 1

Lad $X, Y \in [0,1]$ være stokastiske variable der angiver hvor langt oppe (relativt set) at pinden skal saves over: Givet værdier af X og Y, lægger vi snit i punkterne $X \cdot \ell$ og $Y \cdot \ell$ på pinden.

X og Y er ifølge opgaven uafhængige, og jeg antager at der desuden menes i opgaven at X og Y er ligefordelte på $[0,1]$. Heraf slutter vi straks at parret (X,Y) er ligefordelt på enhedskvadratet $[0,1]^2$. Sandsynligheden for at (X,Y) ligger i en given (målelig) delmængde $A \subseteq [0,1]^2$, vil dermed være lig

$$P((X,Y) \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu([0,1]^2)} = \mu(A) = \mathrm{areal}(A),$$

hvor μ er Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^2$.

Lad $A \subseteq [0,1]^2$ være mængden af (X,Y)-udfald hvor det længste stykke af pinden har længde mindre end $\frac{1}{2}\ell$. Vi ønsker da at

det hele bygger på en matematisk forklarlig rutine bygget på en serie af udregninger, som til alt held altid giver det resultat man gerne vil have. Tag et eksempel: tænk på et tal, gang det med 2, læg 6 til, del med 2 og træk det tal som du oprindeligt tænkte på fra. Jeg gætter på, at du får 3. Overrasket? Nej, vel? Hvis du tænkte på tallet x (det kan sågar være komplekst), giver proceduren dig nemlig $\frac{1}{2}(2x+6) - x = (x+3) - x = 3$. Så ingen stor plyskanin i hatten her.[6]

Efter min mening ville et godt korttrick, der bygger på en serie af udregninger som "tricket" ovenfor, være et, der er variabelt (altså at man kan ændre visse talværdier i et setup og stadig få et trick, der virker), elegant, samt kompliceret i teorien. Sidstnævnte mindsker chancen for, at din udvalgte person kan regne ud hvordan du fandt hans eller hendes kort, så vedkommende netop overrumples af den magi du udøver. Jeg vil præsentere et sådant trick, kaldt *Whispering Jokers*: det blev oprindeligt vist på programmet *Penn & Teller: Fool Us* i 2011 af Graham Jolley, selverklæret tankelæser og mentalist. Et matematisk argument for trickets holdbarhed er præsenteret på `http://youtu.be/vKxFzSwcOhY`, og dette vil jeg også præsentere.

Lad os forestille os, at der er tre personer til stede: mig, Stone og Weierstrass. Jeg hiver et spil kort frem og lægger det på et bord. Stone er over for mig til venstre, Weierstrass over for mig til højre.

[6] Et langt bedre trick ville være dette: stil dig i matematikkantinen og råb, at du kan få alle tilstedeværende til at lynche en af deres medstuderende. Udvælg en tilfældig person og bed ham eller hende om at tænke på et tal. Få ham eller hende til at dele med 0, og begynd at løbe inden du får noget i hovedet.

- ♣ *Trin 1.* Nu beder jeg først Stone om at tage omtrentligt en tredjedel af kortene fra toppen, og derpå Weierstrass om at tage omtrentligt halvdelen af de kort, der er tilbage i den oprindelige bunke. Jeg beder nu begge personer om at kigge på det kort, der er nederst i den bunke de hver har taget (her er det selvfølgelig underforstået, at kortene peger nedad).
- ♣ *Trin 2.* Nu beder jeg først Stone om at tage omtrentligt en tredjedel af kortene fra toppen (og han skal bare tage kortene fra oven, uden at tælle en tredjedel fra), og derpå Weierstrass om at tage omtrentligt halvdelen af de kort, der er tilbage i den oprindelige bunke. Jeg beder nu begge personer om at kigge på det kort, der er nederst i den bunke de hver har taget (her er det selvfølgelig underforstået, at kortene peger nedad). Dernæst samler jeg bunkerne sammen og spreder kortene ud i en vifte på bordet, så de stadig peger nedad. Til Stone og Weierstrass' store overraskelse er der to kort, som vender opad; disse kort tager jeg ud. Det er jokere, og jeg påstår, at jokerne ved, hvilke kort de har set. Jeg spørger nu jokeren længst mod venstre hvilket kort Stone har; jokeren hvisker til mig, at kortet er på placering 18, og jeg lægger jokeren hen til Stone. Analogt spørges jokeren til højre, denne joker hvisker "43"[7] og jeg lægger jokeren hos Weierstrass. Derpå samler jeg kortene sammen, stadig pegende nedad.
- ♣ *Trin 3.* Jeg begynder nu at tælle fra oven. Jeg stopper ved 18, lægger det kort der har denne placering hos Stone, og tilsvarende tæller jeg *videre* til 43 og lægger tilsvarende kort hos Weierstrass. De vender kortene, og det er deres kort. Kort tid efter får jeg en doktorgrad.

Alene placeringerne i ovenstående procedure skriger, at noget er

[7] Bare rolig, 42 er også en mulighed.

Tilbagemelding fra sidst (22. årgang nr.1)

I sidste blok blev læseren bedt om at finde sandsynligheden for at kunne danne en trekant ved at knække en pind over på to vilkårlige, uafhængige steder. Sandsynligheden for dette er en fjerdedel. Blandt de talrige svar, der blev indsendt, har vi udtrukket en heldig vinder! Stort tillykke til Thor Kampmann ('12), du vil modtage din præmie snarest. Blokkens ekstraopgave[10] blev der også flittigt svaret på. De rigtige svar blev indsendt i følgende rækkefølge: Dan ('11), Sune ('05), Thor ('12). Vi har i dette nummer valgt at medtage Sunes flot TeX'ede besvarelse som en særskilt artikel. Se næste side.

[10] Find sandsynligheden for at kunne danne en trekant ved først at knække pinden over en gang og derefter knække det længste stykke over.

Præmieopgave
– nu med endnu flere abekattestreger!

Jingyu She

Blokkens præmieopgave (22. årgang nr. 2)

Peter Pedal skræller en grøn banan og smider den på kåkkenbordet. Det oplyses, at den nu vejer 120 gram, hvoraf vand udgør 75% af massen. 5 timer efter udgør vandet kun 70% af bananens masse. Hvor meget vejer bananen nu?

Blandt de n rigtige svar udtrækkes vinderen, som belønnes med et gavekort på kr. $100 + n$.

Blokkens ekstraopgave (22. årgang nr. 2)

Peter Pedal og hans fire venner har været ude at plukke bananer. Da de er trætte, beslutter de sig for at vente med at fordele bananerne og lægger sig til at sove. I løbet af natten står Peter Pedal op og deler bananerne i fem lige store bunker. Der er en banan tilovers, som han spiser. Han gemmer derefter sin egen bunke og lægger resten tilbage. Efter han har lagt sig til at sove, står en af vennerne op og gør det samme. Han får også én banan i rest, som han spiser. Dette gentager sig for alle fem aber. Om morgenen deler de sammen bananerne i fem lige store bunker, igen med en banan i rest, som går til manden med den gule hat[9]. Spørgsmålet er så: Hvor mange bananer må der mindst have været i den oprindelige bunke?

Vores postkasse `famos@math.ku.dk` holder åbent til og med 24. februar.

[9] Peter Pedals adoptivfar

planlagt, kalkuleret, udregnet, men de dertilhørende kalkulationer er ikke helt nemme. Først kræves en forklaring af tricket, set ud fra et "magisk" synspunkt, og det hele har noget at gøre med hvordan bunkerne samles sammen, som nærmest alle korttricks har som forudsætning, samt en placering af jokerne forud for fremvisningen af korttricket. Jokerne indsættes i kortspillet således: vi starter selvfølgelig med et kortspil på 52 kort, pegende nedad. Tæl 9 kort fra toppen, placér en joker med ansigtet opad, derpå 18 kort efter de 9 første kort (plus jokeren), og placér den anden joker. Vi har altså nu et spil kort på 54 kort, hvor jokerne er på placering 10 og 29 fra oven og med ansigtet opad; således opnår vi, når Stone og Weierstrass deler kortspillet i tre, at de ikke ser en joker, og deres bunker vil højst sandsynligt indeholde en joker hver. Der er altså en sandsynlighed her, for at tricket går galt, men chancen er minimal.

Antager vi nu, at tricket er i gang, kaldes Stones bunke i trin 1 for B_1, Weierstrass' bunke for B_2 og den resterende bunke for B_3. Når kortene samles sammen, skal B_3 være nederst, dernæst B_1 og sidst B_2 i toppen. Når jokerne er taget ud i trin 2, er der nu tre vifter, V_1 hørende til den med det øverste kort, V_3 hørende til den med det nederste og V_2 den sidste vifte i midten. Når kortene samles sammen her, skal V_2 være nederst, dernæst V_3 og sidst V_1 i toppen. Gøres dette, skulle tricket meget gerne fungere.

Nu har jeg altså lært et korttrick fra mig. Amatørmagikeren kan nu gå ud og imponere sine venner uden ende, men vi kloge børn kunne selvfølgelig godt tænke os at vide, hvordan tricket fungerer matematisk, og vi vil så vidt muligt generalisere det, så det ikke kun behøver at gælde med tallene 18 og 43. Ud fra at vi ved, at der er 54 kort, 52 normale spillekort og 2 jokere, definerer vi nu nogle variable til at hjælpe os undervejs.

- ♠ Den første joker J_1 har placering j_1 fra oven, og den anden joker J_2 har placering j_2 fra oven. I ovenstående tilfælde er $j_1 = 10$ og $j_2 = 29$.
- ♠ Kortet K_1 som Stone har set, har placering $j_1 + d_1$ fra oven, hvor d_1 er en eller anden differens, og Weierstrass' kort K_2 har tilsvarende placering $j_2 + d_2$ fra oven. Lad os endvidere antage, at $d_1 > 0$ og $d_2 > 0$.

I trin 1 er kortspillet delt op i tre bunker: B_1 som har størrelse $j_1 + d_1$, B_2 som har størrelse $j_2 + d_2 - j_1 - d_1$, og B_3 som har størrelse $54 - j_2 - d_2$.

Ved at lægge bunkerne i rækkefølgen B_2, B_1 og B_3 set *fra oven*, vil K_1 nu have placering $|B_1| + |B_2|$ og K_2 har placering $|B_2|$. Nu spredes kortene ud i en vifte. Den første joker J_1 var i B_1 og J_2 var i B_2, som vi før så; J_1 har derfor placering $|B_1| + |B_2| - d_1$ i viften og den anden joker har placering $|B_2| - d_2$.

Nu bliver det kompliceret. Jokerne tages nu ud, og vi får de tre vifter V_1, V_2 og V_3 som beskrevet ovenfor. ♡

labelitemi V_1 har størrelse $|B_2| - d_2 - 1 = j_2 - j_1 - d_1 - 1$, idet vi regner fra den anden jokers placering (den har været øverst) og har fjernet en joker.

labelitemi V_2 har størrelse $|B_1| + |B_2| - d_1 - |V_1| - 2 = j_1 + d_2 - 1$, idet vi regner fra den første jokers placering, fraregner kortene i V_1 og fjerner to jokere.

labelitemi V_3 må derpå have størrelse $52 - |V_1| - |V_2| = 54 - j_2 + d_1 - d_2$, idet $|V_1| + |V_2| = j_2 - d_1 + d_2 - 2$.

Ovenstående udregninger er nemme at lave; det næste tager lidt kegler. Efter at have fjernet jokerne, har vi nu et kortspil på 52 kort, hvor K_1 er rykket 2 pladser op og derfor har placering $|B_1|+$

Et jobopslag

Det er en meget vigtig mission for FRIC at give unge forskertalenter mulighed for at udvikle sig på et sted, som er med på forskningsfronten. FRIC vil løbende få behov for at ansætte dygtige studerende til at hjælpe etablerede forskere med for eksempel datarensning, beregningsarbejde, modelimplementering og litteratursøgning. Så i stedet for at søge studenterarbejde ude i erhvervslivet, så ville et job som studentermedhjælp ved FRIC måske være en spændende mulighed? Typisk vil man skulle levere 10-15 timer om ugen, men med fleksibilitet til at disponere sine timer både inden for ugen og hen over uger. Den idelle profil har taget nogle kurser i finansieringsteori, kan lide at arbejde med data og med implementering af modeller i for eksempel Excel, Matlab, R og SAS. Han eller hun formulerer sig klart skriftligt og mundtligt og har opnået høje karakterer i de fleste fag. Vi tilbyder et studenterjob, som giver mulighed for at se om en forskerkarriere kunne være interessant, og som måske kan give inspiration til specialeskrivningen. Hvis du synes dette lyder interessant, så send en (elektronisk) ansøgning med CV og eksamensudskrift til Centerkoordinator Julie de Molade på `fric@cbs.dk`, så den er os i hænde senest 18. januar, 2013. Du kan læse mere om centeret på vores hjemmeside, `www.fric.dk`, hvor du også kan skrive dig på vores mailingliste og holde dig orienteret om fremtidige arrangementer.

Centerets forskningsområde er den teoretiske og empiriske analyse af disse fænomener og implikationerne for design og regulering af finansielle markeder. Helt konkret er centerets teoretiske og empiriske forskning for eksempel relevant for at forstå, hvilken betydning transaktionsskatter eller forbud mod kortsalg af aktier kan have for prisdannelsen i markedet.

Ambitionen

Vi håber med FRIC at befæste CBS' position som et centrum for forskning i finansiel økonomi i europæisk topklasse. Det betyder helt konkret, at vi skal producere forskning i toptidsskrifter, men vi ønsker også at producere forskning, der tager udgangspunkt i virkelige problemer. FRIC forsøger, blandt andet med sin Practitioner Seminar Series, at holde en tæt dialog med folk, som arbejder i markederne, så forskerne kan inspireres til at arbejde med relevante og grundlæggende problemstillinger. Selvfølgelig skulle FRIC også gerne bidrage til, at vi uddanner endnu bedre kandidater i finansiering. Hvis kandidater under deres studier har mødt dygtige og inspirerende forskere, som kan formidle deres viden og analytiske tankegang, så bliver kandidaterne ikke alene bedre forskere - de bærer også kvalitet og viden med sig videre ud i den finansielle sektor.

Studerende i finansiel økonomi i Danmark er i den gunstige situation, at vi for første gang har et stærkt og aktivt miljø inden for dette område. Der har aldrig før været bedre muligheder for at tage kurser og få kompetent vejledning inden for en bred vifte af emner i finansiering. Det er bare med at udnytte denne mulighed ved at deltage i nogle af aktiviteterne og måske endda ved at søge på det jobopslag, som jeg vil runde artiklen af med.

$|B_2|-2$ og K_2 har placering $|B_2|-1$, idet den kun er rykket én plads op. K_1 er nu i V_3, idet $|B_1|+|B_2|-2>|V_1|+|V_2|$, og K_2 er i V_2, idet $|V_1|+|V_2|\geq|B_2|-1>|V_1|$. Placeringen af K_1 i V_3 er derfor

$$(|B_1|+|B_2|-2)-(|V_1|+|V_2|)=d_1$$

og placeringen af K_2 i V_2 er

$$|B_2|-1-|V_1|=j_2+d_2-j_1-d_1-1-(j_2-j_1-d_1-1)=d_2.$$

Vi placerer nu vifterne i rækkefølgen V_1, V_3 og V_2 igen set *fra oven*. Vi har nu, at K_1 har placering

$$|V_1|+(|B_1|+|B_2|-2-|V_1|-|V_2|)=(j_2-j_1-d_1-1)+d_1=j_2-j_1-1,$$

og K_2 har placering

$$(|V_1|+|V_3|)+d_2=52-|V_2|-d_2=53-j_1.$$

Altså er kortenes placering bestemt ud fra hvor jokerne placeres; som vi så før, hvor jokerne var placeret på pladserne $j_1=10$ og $j_2=29$, vil K_1 derfor have placering $29-10-1=18$ og K_2 har placering $53-10=43$. Jokernes placering kan, som vi har fundet, også varieres, så vi har dermed også en del variationer over samme trick. Det sjoveste er dog, at tricket, utroligt som det er, er ren matematik, og det tager kegler foran et publikum (giv Graham Jolleys optræden et kig og se, hvad jeg mener).

Nu kunne nogen måske undre sig: hvorfor kaster man sig ud i et matematisk argument for, at et korttrick fungerer? Tager det ikke magien væk fra selve tricket? Hertil er svaret selvfølgelig både ja og nej, og argumentet kan man selv trylle sig frem til. Det er lige for næsen af dig.

FRIC
– et nyt center finansieret af Danmarks Grundforskningsfond

Af Centerleder, professor David Lando

Den 1. april 2012 åbnede Center for Finansielle Friktioner (FRIC) på CBS' Institut for Finansiering. FRIC er et såkaldt Center of Excellence bevilget af Danmarks Grundforskningsfond. Bevillingen er på 48 millioner kroner over 6 år, og dertil kommer en høj grad af medfinansiering fra CBS, som for eksempel stiller lokaler til rådighed og dækker lønudgifter til alle faste videnskabelige medarbejdere i centeret. Centeret består i øjeblikket af 5 faste medlemmer, som er tilknyttet Institut for Finansiering på CBS, et medlem fra Økonomisk Institut på KU og tre medlemmer tilknyttet universiteter i udlandet. Derudover er der i øjeblikket 14 videnskabelige medarbejdere (adjunkter, post.docs, ph.d. studerende, videnskabelige assistenter, studentermedhjælpere), hvis arbejde helt eller delvist finansieres af centeret.

Efter år 5 vil FRIC blive grundigt evalueret, og hvis evalueringen falder tilfredsstillende ud, vil bevillingen kunne forlænges i 4 år, så centerets samlede levetid bliver 10 år. Det er et af hovedformålene med bevillinger fra Danmarks Grundforskningsfond at tilskynde bevillingshaveren til at tænke langsigtet, og det giver den lange levetid fin mulighed for. Men hvad er det egentlig FRIC forsker i? Hvad er centerets mission i det hele taget? Og hvilken interesse kan studerende i FAMØS' læserskare have i centeret? Det vil jeg prøve at svare på nedenfor, og hvis du synes det hele lyder interessant, har du måske også interesse i at kigge på det jobopslag, som runder artiklen af.

Hvad er finansielle friktioner?

Forskning i finansiel økonomi går i vidt omfang ud på at forstå sammenhængen mellem finansielle aktivers risiko og deres pris. I velfungerende markeder kan man fokusere sin analyse på de betalingsrækker, som aktiverne leverer, og på investorers holdning til risiko, dvs. hvor meget kompensation de kræver for at bære forskellige former for risici. I velfungerende markeder kan man endda nogle gange klare prisfastsættelsen uden at kende investorers holdning til risiko. Visse instrumenter kan nemlig prisfastsættes 'ved arbitrage', dvs. ved at replikere deres betalingsstrømme ved hjælp af andre instrumenter i markedet, hvis pris man kan observere. Her bruger man det tætteste på en naturlov, der findes i økonomi, nemlig 'Law of One Price' - ting, der giver det samme, koster det samme. I andre metoder prisfastsætter man et finansielt aktiv ved både at se på dets (risikofyldte) betalinger og på investorers holdning til risiko. Den såkaldte Capital Asset Pricing Model (CAPM)[8] er et berømt eksempel på dette. Den finansielle krise har bragt fornyet fokus på en række andre faktorer, som også er afgørende for prisdannelsen i finansielle markeder. Blandt disse faktorer er aktivernes omsættelighed (likviditet), finansielle markedsdeltageres adgang til funding, modpartsrisiko og deraf følgende krav om sikkerhedsstillelse i forbindelse med handel, samt kapitalkrav for finansielle institutioner. Særligt i krisetider kan disse finansielle friktioner betyde, at Law of One Price bryder sammen for visse aktivklasser, og der er empirisk belæg for, at en udvidet CAPM model, der inddrager likviditetsrisiko, klarer sig bedre end standard CAPM-modellen. Endvidere kan finansielle rådgivere, eksperter og visse type af finansiel regulering påvirke priser i markedet og måske forårsage flokadfærd og prisbobler.

[8] Denne møder du på kurset `Fin1`, red.