Tallet π er irrationalt

Jens Siegstad

At tallet π er irrationalt har været kendt i pænt lang tid. Aristoteles postulerede det da han påstod at diameteren og radius i en cirkel er inkommensurable størrelser ([3]). Der skulle gå over 2000 år før Aristoteles' påstand blev bevist! I 1768 gav den schweiziske matematiker Johann Heinrich Lambert som den første et bevis for irrationaliteten af π. Vi skal i denne artikel se det elegante bevis som den canadisk-amerikanske matematiker Ivan Niven gav i 1946.

Sætning 1 *Tallet π er irrationalt.*

Bevis. Antag for modstrid at π er rational. Da kan vi finde naturlige tal a og b således at $\pi = \frac{a}{b}$. Lad n være et naturligt tal, og definer funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

Påstand 1
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og for $0 < x < \pi$ gælder at

$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Bevis. Da $x > 0$ har vi at $bx > 0$, og dermed har vi at $0 < a-bx < a$, og således gælder at $0 < (a-bx)^n < a^n$. For $0 < x < \pi$ gælder at $0 < \sin(x) \leq 1$. Ved at benytte disse uligheder finder vi at

$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

$\square$

Påstand 2
Der gælder at
$$\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Bevis. Husk at den naturlige eksponentialfunktion har rækkefremstillingen
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
og ovenstående rækkefremstilling er gyldig for ethvert $x \in \mathbb{R}$. Vi har således at $\frac{\pi^n a^n}{n!}$ er det $(n+1)$'te led i den konvergente række
$$e^{\pi a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n a^n}{n!}$$
og dermed har vi at $\frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$. $\square$

Ved at benytte ovenstående observationer kan vi konkludere at integralet $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx$ er positivt men mindre end $\pi\frac{\pi^n a^n}{n!} = \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$ som konvergerer mod 0 for $n \to \infty$ ifølge Påstand 2. Vi vil i det følgende vise at vores antagelse om at π er rational medfører at dette integral er et heltal, hvorved vi opnår den ønskede modstrid. Vi definerer nu funktionen $F_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved
$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_n^{(2i)}(x)$$
hvor $f_n^{(j)}$ betegner den j'te afledede af f_n.

Påstand 3
Funktionen $x \mapsto F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)$ er en stamfunktion til $x \mapsto f_n(x)\sin(x)$, og der gælder at

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx = F_n(0) + F_n(\pi).$$

Bevis. Vi finder at

$$\begin{aligned}\big(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\big)' &= F_n''(x)\sin(x) + F_n'(x)\cos(x)\\ &\quad - F_n'(x)\cos(x) + F_n(x)\sin(x).\\ &= \sin(x)\left(F_n''(x) + F_n(x)\right).\end{aligned}$$

Vi simplificerer nu $F_n''(x) + F_n(x)$.

$$\begin{aligned}F_n''(x) + F_n(x) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_n^{(2i+2)}(x) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_n^{(2i)}(x)\\ &= \left(f_n^{(2)}(x) - f_n^{(4)}(x) + f_n^{(6)}(x) + \cdots (-1)^n f_n^{(2n+2)}\right)\\ &+ \left(f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) + \cdots (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right)\\ &= f_n(x)\end{aligned}$$

idet $f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ da f er polynomium af grad $2n$. Dermed har vi at $(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x))' = f_n(x)\sin(x)$ som ønsket. Vi finder nu at

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx &= \Big[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\Big]_0^\pi\\ &= F_n(0) + F_n(\pi)\end{aligned}$$

som ønsket. □

Påstand 4
Der gælder at $f_n^{(j)}(0)$ og $f_n^{(j)}(\pi)$ er et heltal for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

Bevis. For at vise ovenstående omskriver vi udtrykket for f_n ved at benytte binomialformlen:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\
&= \frac{x^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j x^j \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(-b)^j x^{j+n} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n}\binom{n}{j-n}a^{2n-j}(-b)^{j-n} x^{j} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} c_j x^j
\end{aligned}$$

hvor

$$c_j = \binom{n}{j-n}a^{2n-j}(-b)^{j-n}.$$

Det ses af ovenstående at hvis vi differentierer f_n mindre end n gange, fås et polynomium uden konstantled. Dermed har vi at $f_n^{(j)}(0) = 0$ for $j < n$. Hvis $j > 2n$, har vi at $f_n^{(j)} \equiv 0$, og specielt har vi at $f_n^{(j)}(0) = 0$. Differentierer vi f_n j gange hvor $n \le j \le 2n$, fås netop ét konstantled, og heraf følger det at $f_n^{(j)}(0)$ er lig med dette konstantled. Vi finder at $f_n^{(j)}(0) = \frac{j!c_j}{n!}$, og da $j \ge n$, er dette tal et heltal. For at vise at $f_n^{(j)}(\pi)$ er et heltal, får vi behov for følgende identitet

$$f_n(x) = f_n(\pi - x) \text{ for alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lad $x \in \mathbb{R}$. Da $a = b\pi$ har vi at

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(b\pi - bx)^n}{n!} \\ &= \frac{(bx)^n(\pi - x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Heraf følger det at

$$\begin{aligned} f_n(\pi - x) &= \frac{(b(\pi - x))^n(\pi - (\pi - x))^n}{n} \\ &= \frac{\left(b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n x^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

og dermed har vi vist (1). Ved gentagen anvendelse af kædereglen er det rasende nemt at vise at $f_n^{(j)}(x) = (-1)^j f_n^{(j)}(\pi - x)$. Dermed er $f_n^{(j)}(0) = (-1)^j f_n^{(j)}(\pi)$, og heraf følger at $f_n^{(j)}(\pi)$ ligeledes er et heltal for ethvert $j \in \mathbb{N}$. □

Påstand 1 giver at der findes et $n \in \mathbb{N}$ således at

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx < 1.$$

Af påstand 4 samt definitionen af F_n, følger det at $F_n(0)$ og $F_n(\pi)$ er heltal. Dermed har vi at

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx = F_n(0) + F_n(\pi)$$

er et heltal, og dermed har vi den ønskede modstrid. Vi kan således konkludere at π er irrationalt. $\square$

Litteratur

[1] Dan Beltoft og Klaus Thomsen. *Talfølger og -rækker. Introduktion til Matematisk Analyse.* Aarhus Universitet 2010.

[2] Ivan Niven *A simple proof that π is irrational.* Bulletin of the American Mathematical Society 53 (6) pp. 509.

[3] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*, Springer, Fourth Edition 2010.