

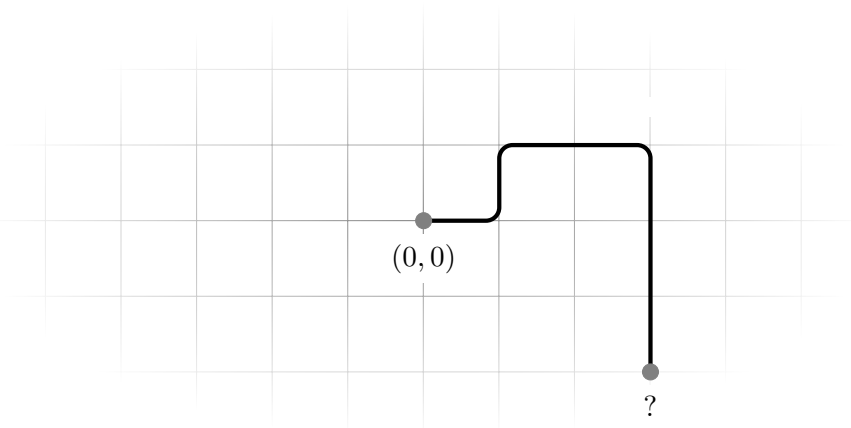
En central grænseværdisætning for den fri gruppe

Nilin Abrahamsen

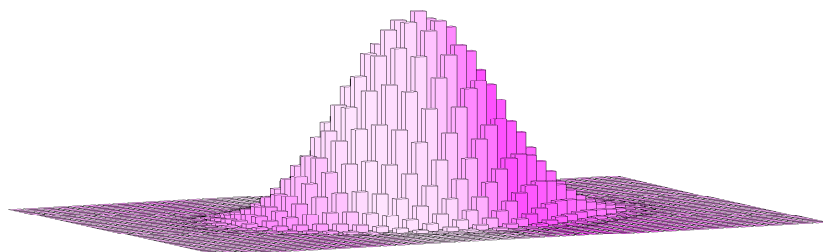
Denne artikel giver en forenklet udgave af en central grænseværdisætning [PR05] af Petridis og Risager for den fri gruppe på $m \geq 2$ frembringere.

Forestil dig, at du sidder på din cykel ved vejkrydset $(0, 0)$ i byen $\mathbb{Z}^2$. Hvert punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ er et vejkryds, og fra hvert (x_1, x_2) går en 1 km lang vej til hvert af de fire kryds $(x_1 \pm 1, x_2)$ og $(x_1, x_2 \pm 1)$. Du vil nu køre en tur rundt i $\mathbb{Z}^2$, og ved hvert kryds vælger du tilfældigt, om du vil fortsætte mod højre, venstre eller ligeud. Ingen u-vendinger er tilladt!

Hvor mon du ender efter en sådan tilfældig tur?



Bemærk, at valgene af retning væk fra første, andet, tredje osv. kryds på ruten ikke er indbyrdes uafhængige: F.eks. kan du ikke køre mod øst og derpå mod vest ved det følgende kryds.¹⁰ Med en smule omhu kan man udforme en algoritme, som lader en computer udregne sandsynligheden for at ende i et givet punkt efter n kilometer. Det kræver dog, at n ikke er for stor. Vi kan visualisere sandsynligheden for at ende et givet sted efter 20km:



Figur 1 (tæthed for) sandsynlighedsfordelingen for din position i $\mathbb{Z}^2$ efter at have kørt 20km tilfældigt rundt.

Men hov, sikke en fin klokkeform! Har dette noget at gøre med normalfordelingen?

Vi viser i denne artikel, at endepunkterne for de beskrevne ruter er *asymptotisk normalfordelte*, når ruternes længder går mod ∞ .

Lad os navngive hver mulig (endelig) rute fra $(0,0)$ i $\mathbb{Z}^2$. Vi skriver a_1 for retningen øst og a_2 for nord. Vest og syd er hhv. a_1^{-1} og a_2^{-1} . Vi lader et ord af bogstaver fra alfabetet $\{a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}\}$ svare

¹⁰Pga. denne afhængighed kan vi ikke anvende den klassiske centrale grænseværdisætning. Man kunne dog se cykelturen som en Markovproces, hvor vi nyder godt af en "asymptotisk uafhængighed". Se [ILK71]

til følgende rute: Begynd i punktet $(0,0)$ og læs ordet igennem fra venstre – for hvert bogstav i ordet kører vi længden 1 i retningen angivet af bogstavet. Bemærk, at forbuddet mod u-vendinger forhindrer ord, hvor a_j og a_j^{-1} støder op til hinanden ($j = 1, 2$). Mængden af sådanne ord, hvor formationen $a_j a_j^{-1}$ og $a_j^{-1} a_j$ ikke optræder, kan påføres en gruppestruktur og kaldes den fri gruppe på 2 frembringere, som vi nu skal se:

Den fri gruppe $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$

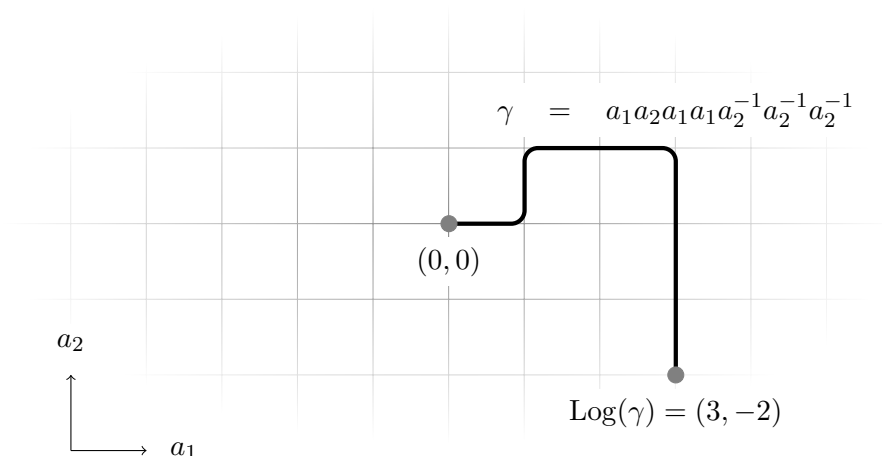
Mere generelt kan vi, for $m \in \mathbb{N}$, konstruere den fri gruppe $F(a_1, \dots, a_m)$ på m frembringere som mængden af ord bestående af bogstaverne $a_1, \dots, a_m$ og $a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$, hvor a_j og a_j^{-1} ikke støder op til hinanden for $j = 1, \dots, m$. Produktet $w_1 w_2 \in F(a_1, \dots, a_m)$ af elementerne $w_1, w_2 \in F(a_1, \dots, a_m)$ i gruppen er givet som det ord, der fremkommer ved at skrive ordet w_1 til venstre for w_2 og herefter fjerne alle par $a_j a_j^{-1}$ og $a_j^{-1} a_j$ i det resulterende ord. Det tomme ord $\epsilon \in F(a_1, \dots, a_m)$ er neutral-elementet, og det inverse element til et ord fremkommer ved at skrive bogstaverne i omvendt rækkefølge og bytte a_j og a_j^{-1} ud med hhv. a_j^{-1} og a_j .

Vi vil betragte problemet for $m \geq 2$. Lad derfor $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ være givet. Vi indfører betegnelsen $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$ for den fri gruppe på m frembringere.

Endepunktet for en rute

Vi kan definere en homomorfi fra $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$ til den additive gruppe $\mathbb{R}^m$ ved

$$\text{Log} : a_j \mapsto e_j \quad \text{for } j = 1, \dots, m, \quad (1)$$



hvor e_j er den j 'te enhedsvektor i $\mathbb{R}^m$. Som før beskrevet betegner hvert ord i Γ en rute i $\mathbb{Z}^m$, hvor det k 'te bogstav angiver retningen fra det k 'te punkt på ruten. Den j 'te koordinat af $\text{Log}(\gamma)$ er lig med antallet af gange, a_j optræder, minus antallet af gange, a_j^{-1} optræder i ordet γ . Men dette er netop j 'te koordinat for slutpunktet af ruten, hvis den begynder i $(0, \dots, 0)$. $\text{Log}(\gamma)$ er hermed den vektor, som beskriver slutpunktet for ruten svarende til γ .

Vi betegner mængden af elementer i Γ med ordlængde n ved

$$\Gamma_n := \{\gamma \in \Gamma \mid \text{wl}(\gamma) = n\}$$

svarende til ruter af længde n . Vi lader Y_n være en ligefordelt stokastisk variabel på $\Gamma_n \subset \Gamma$, dvs. at Y_n repræsenterer en tilfældig rute af længde n . Det vises, at fordelingerne af de transformerede variable $\text{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ konvergerer svagt mod normalfordelingen på $\mathbb{R}^m$ med variansmatrice $\Sigma = \frac{1}{m-1}I$, hvilket vil sige:

Sætning 1 (forenklet variant af [PR05], Petridis og Risager) *Lad Y_n være ligefordelt på Γ_n . For enhver Borelmængde $B \subset \mathbb{R}^m$, hvor Lebesgue-målet af ∂B er 0, gælder*

$$\mathbb{P}\left(\frac{\text{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m-1}{2\pi}\right)^{r/2} \int_B e^{-\frac{m-1}{2}\|x\|^2} dx$$

Her kan venstresiden skrives

$$\mathbb{P}\left(\frac{\text{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) = \# \left\{ \gamma \in \Gamma_n \mid \frac{\text{Log}(\gamma)}{\sqrt{n}} \in B \right\} / \#\Gamma_n$$

(# S betegner antallet af elementer i S , mens $\mathbb{P}(U)$ står for sandsynligheden af udfaldet U .)

Ovenstående er en forenklet udgave af en sætning [PR05] af Petridis og Risager, som tæller *cyklisk reducerede* gruppeelementer i den fri gruppe ved at arbejde med *Iharas Zetafunktion*. En lignende sætning vises også i [Riv10].

Vi går nu i gang med at bevise sætning 1. Uden at afbryde sammenhængen kan man dog springe frem til side 47 for at se en anvendelse af sætningen.

Strategi

Vi vil forstå fordelingen ν af en stokastisk variabel X igennem dens *karakteristiske funktion* [Bil95] $f_\nu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, defineret ved:

$$f_\nu(t) = \mathbb{E}[\exp(it \cdot X)] \quad (2)$$

hvor $\mathbb{E} \exp(it \cdot X)$ betegner middelværdien af variabelen $\mathbb{E} \exp(it \cdot X)$. Vi kalder også f_ν for den karakteristiske funktion for X .

Vi vil vise vores konvergensresultat vha. Lévy's konvergenssætning, som behandles i [Bil95, s. 383]:

Sætning 2 (Lévy) *En følge ν_n af fordelinger konvergerer svagt mod en fordeling ν , netop hvis de karakteristiske funktioner f_{ν_n} konvergerer punktvis mod den karakteristiske funktion f_{ν} .*

Definition 3 At fordelingerne ν_n for stokastiske variable X_n konvergerer svagt mod ν betyder per definition, at $P(X_n \in B) \rightarrow \nu(B)$, $n \rightarrow \infty$ for Borelmængder B , hvor ∂B har Lebesgue-mål 0.

Vi håber på at kunne normalisere fordelingerne μ_n af $\text{Log}(Y_n)$ med en funktion $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, således at fordelingerne ν_n for $\eta(n) \text{Log}(Y_n)$ konvergerer for $n \rightarrow \infty$. Vi kan skrive den karakteristiske funktion f_{ν_n} som

$$f_{\nu_n}(t) = E[\exp(it \cdot \eta(n) \text{Log}(Y_n))] = f_{\mu_n}(\eta(n)t)$$

Konvergensens af de normaliserede fordelinger vil følge, hvis $f_{\nu_n}(t)$ konvergerer punktvis mod den karakteristiske funktion for en fordeling ν :

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(\eta(n)t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{\nu}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^m$$

Vi ønsker altså at forstå de karakteristiske funktioner $f_{\mu_n}(\epsilon)$ for fordelingerne af $\text{Log}(Y_n)$, så vi kan substituere $\epsilon = \eta(n)t$.

Da Y_n er ligefordelt på Γ_n , giver (2) den karakteristiske funktion for $\text{Log}(Y_n)$ som

$$f_{\mu_n}(t) = E[\exp(it \cdot \text{Log}(Y_n))] = \frac{1}{\#\Gamma_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \exp(it \cdot \text{Log}(\gamma)) \quad (3)$$

Vi vil udregne ovenstående, så vi kan vise konvergensens af $f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(t/\sqrt{n})$ for $n \rightarrow \infty$. Det vil følge, at fordelingerne ν_n af følgen $\text{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ konvergerer svagt mod en normalfordeling.

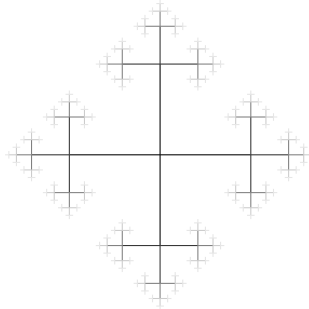
Spektralteori på et træ

Lad Y_n være ligefordelt på $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \text{wl}(\gamma) = n\}$. Den karakteristiske funktion f_{μ_n} for $\text{Log}(Y_n)$ bestemmes ud fra summen

$$\#(\Gamma_n) f_{\mu_n}(\epsilon) = \sum_{\text{wl}(\gamma)=n} \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(\gamma)) \quad (4)$$

Dette og følgende afsnit om $q+1$ -regulære træer er en forenklet variant af idéer fra [VN94], hvor tilsvarende metoder bruges til blandt andet at give en formel for *Itharas Zetafunktion*.

Vi indfører Cayley-grafen $X(\Gamma, S)$ for Γ : Vi har defineret Γ som den fri gruppe på de m bogstaver i mængden $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Lad mængden af knuder i $X(\Gamma, S)$ være Γ , og lad hver knude $\gamma \in \Gamma$ være forbundet til de $2m$ knuder på formen $\gamma\delta$, hvor $\delta \in S := \{a_1, \dots, a_m, a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}\}$. $X(\Gamma, S)$ er et træ, dvs. grafen har ingen cykler eller løkker, og vi vil kalde neutralelementet $\epsilon \in \Gamma$ for træets rod. Generelt vil vi lade $\mathfrak{o}$ betegne roden i et træ.



Figur 2 Cayley-grafen for den fri gruppe $\Gamma = F(a_1, a_2)$ på 2 frembringere

Vi vil opbygge den følgende teori for et $q + 1$ -regulært træ X , dvs. et træ, hvor præcis $q + 1$ kanter er forbundet til hver knude. Mængden af knuder i X betegnes $\text{vert}(X)$. Forskellen fra at arbejde direkte på Γ er, at vi ikke begrænser os til at $q + 1$ er lige. Givet $v, w \in \text{vert}(X)$ skriver vi $d(v, w)$ for den geodætiske afstand mellem v og w , dvs. længden på den korteste sti fra v til w .

Vi skriver $\chi_\epsilon(\gamma) := \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(\gamma))$. χ_ϵ er en karakter på Γ , dvs. en gruppehomomorfi $\Gamma \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$:

$$\begin{aligned}\chi_\epsilon(w_1 w_2^{-1}) &= \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(w_1 w_2^{-1})) \\ &= \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(w_1) - i\epsilon \cdot \text{Log}(w_2)) = \chi_\epsilon(w_1) \chi_\epsilon(w_2)^{-1}\end{aligned}$$

Vi indfører følgende notation:

Notation 1 Lad $\mathbb{C}^{\text{vert}(X)}$ være rummet af funktioner $\text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C}$.

Vi definerer naboooperatoren $T_1 : \mathbb{C}^{\text{vert}(X)} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{vert}(X)}$, der sender en funktion $\phi : \text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ til $T_1 \phi : \text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$T_1 \phi : v \mapsto \sum_{d(v,w)=1} \phi(w)$$

Vi bemærker, at χ_ϵ er en egenfunktion for T_1 . Der gælder nemlig, at

$$\begin{aligned}[T_1 \chi_\epsilon](\gamma) &= \sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\gamma\delta) \\ &= \sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\gamma) \chi_\epsilon(\delta) = \left(\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta) \right) \chi_\epsilon(\gamma) \quad (5)\end{aligned}$$

så χ_ϵ er en egenfunktion svarende til egenværdien $\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta)$. Vi vil bruge denne egenskab ved χ_ϵ til at summere den over en "cirkel med radius n " som i udtrykket (4) for den karakteristiske funktion.

Scenariet er altså følgende: Lad X være et $q+1$ -regulært træ, og lad operatoren T_1 være givet som ovenfor. Givet en egenfunktion ϕ for T_1 ønsker vi at udregne

$$\sum_{d(o,w)=n} \phi(w) \quad (6)$$

Summen (6) specialiserer til (4), når vi lader X være Cayley-grafen for Γ , så $\text{vert}(X) = \Gamma$, og vi vælger $\phi(\gamma) = \chi_\epsilon(\gamma) = \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(\gamma))$.

Integraloperatorer

Vi generaliserer T_1 med følgende familie af operatorer:

Definition 4 ([VN94]) For $n = 0, 1, \dots$ definerer vi operatoren $T_n : \mathbb{C}^{\text{vert}(X)} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{vert}(X)}$ ved:

$$[T_n(\phi)](v) := \sum_{d(v,w)=n} \phi(w) \quad \text{for } \phi : \text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C} \quad (7)$$

Vi vil vise, at enhver funktion ϕ med $T_1(\phi) = \lambda\phi$ er egenfunktion for *alle* operatorerne T_n . Denne egenskab tillader os at finde den ønskede sum

$$\sum_{d(o,w)=n} \phi(w) = [T_n(\phi)](o) = \lambda_n \phi(o)$$

hvis vi kan finde egenværdien λ_n hørende til ϕ under operatoren T_n . Vi begynder med at vise, at T_n kan konstrueres ud fra T_1 :

Lemma 5 ([VN94]) *Givet $n \in \mathbb{N}_0$ findes koefficienter $c_n^1, \dots, c_n^n \in \mathbb{Z}$ så*

$$T_n = \sum_{j=0}^n c_n^j T_1^j$$

Bevis. Påstanden gælder for $T_0 = T_1^0$ og for T_1 . Vi finder et rekursivt udtryk for T_{n+1} ud fra T_{n-1} og T_n og viser lemmaet ved induktion. Lad os først betragte sammensætningen $T_1 \circ T_n$.

$$\begin{aligned} [T_1 \circ T_n(\phi)](v) &= \sum_{d(v,v')=1} [T_n(\phi)](v') \\ &= \sum_{d(v,v')=1} \left(\sum_{d(v',w)=n} \phi(w) \right) = \sum_{\substack{d(v,v')=1 \\ d(v',w)=n}} \phi(w) \end{aligned}$$

Vi evaluerer den sidste sum med antagelsen $n \geq 2$: Kald en sti fra v til w for en geodæt, hvis den har minimal længde blandt sådanne stier. Da X er et træ, er geodæten fra v til w entydig.

$d(v, w)$ er enten $n+1$ eller $n-1$ – hvis ikke w ligger på geodæten fra v til v' , har vi $d(v, w) = d(v, v') + d(v', w) = n+1$; hvis den gør, har vi $d(v, w) = d(v, v') - d(v', w) = n-1$. Hvis $d(v, w) = n+1$, findes netop ét valg af v' i ovenstående sum, nemlig hvor v' er den første knude efter v på geodæten fra v til w . Hvis derimod $d(v, w) = n-1$, løber v' gennem de q naboknuder til v , som ikke ligger på geodæten mellem v og w . Vi får altså:

$$\sum_{\substack{d(v,v')=1 \\ d(v',w)=n}} \phi(w) = \sum_{d(v,w)=n+1} \phi(w) + q \sum_{d(v,w)=n-1} \phi(w) \quad \text{for } n \geq 2 \quad (8)$$

Vi har derfor relationen

$$T_1 \circ T_n = T_{n+1} + q T_{n-1} \quad \text{for } n \geq 2 \quad (9)$$

som giver os det rekursive udtryk

$$T_{n+1} = T_1 \circ T_n - q T_{n-1} \quad \text{for } n \geq 2 \quad (10)$$

Vi har nu etableret induktionsskridtet. Vi starter induktionen med $n = 1, 2$. T_2 findes ud fra $T_1^2 = T_1 \circ T_1$ analogt til (9), men nu er $n = 1$, så tilfældet $d(v, w) = n - 1$ svarer til $v = w$, og alle $q + 1$ naboknuder v' til v opfylder $d(v, v') = 1, d(v', w) = n$. Dette giver:

$$T_1 \circ T_1 = T_2 + (q + 1) T_0 \quad (11)$$

dvs.

$$T_2 = T_1^2 - (q + 1) T_1^0 \quad (12)$$

og vi kan starte induktionen. $\square$

Notation 2 Vi indfører polynomierne $P_0, P_1, \dots$ ved

$$P_n(F) := \sum_{j=0}^n c_n^j F^j$$

Således at $T_n = P_n(T_1)$. Bemærk at F kan være en operator eller et tal i $\mathbb{C}$.

Enhver egenfunktion ϕ for T_1 svarende til egenværdien λ opfylder, at

$$T_n(\phi) = \sum_{j=0}^n c_n^j T_1^j(\phi) = \sum_{j=0}^n c_n^j \lambda^j \phi = P_n(\lambda) \phi$$

Dette giver os et redskab til at forstå T_n for en funktion ϕ med $T_1 \phi = \lambda \phi$: Vi skal blot forstå T_n for en vilkårlig egenfunktion $\sigma \in \mathbb{C}^{vert(X)}$ svarende til samme egenværdi $T_1 \sigma = \lambda \sigma$, for da

vil T_n skalere ϕ og σ med samme faktor $P_n(\lambda)$. Vi opsummerer i nedenstående sætning og begynder derefter søgningen efter en egenfunktion σ , som tillader os at udregne faktoren $P_n(\lambda)$.

Korollar 6 For $\phi \in \mathbb{C}^{vert(X)}$ gælder:

$$T_1(\phi) = \lambda\phi \implies T_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (13)$$

□

Sfæriske funktioner

Givet $\lambda \in \mathbb{C}$ søger vi en egenfunktion σ for T_1 svarende til egenværdien λ , som tillader os at udregne $P_n(\lambda)$. Ved ovenstående korollar kan vi skrive $T_n(\sigma) = P_n(\lambda)\sigma$. Specielt gælder $[T_n(\sigma)](\mathfrak{o}) = P_n(\lambda)\sigma(\mathfrak{o})$. Kræver vi ydermere $\sigma(\mathfrak{o}) = 1$, bliver foregående ligning

$$P_n(\lambda) = [T_n(\sigma)](\mathfrak{o}) = \sum_{d(\mathfrak{o}, w) = n} \sigma(w)$$

Antag, at σ er rotationsinvariant om $\mathfrak{o}$, dvs. vi kan skrive $\sigma(w) = s(d(\mathfrak{o}, w))$. Så bliver alle led ens i ovenstående sum, så vi får

$$P_n(\lambda) = \#(C_n(\mathfrak{o})) s(n) \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \quad (14)$$

hvor $C_n(v) = \{w \in \text{vert}(X) | d(v, w) = n\}$. Vi er interesserede i funktioner σ , der opfylder ovenstående betingelser. I [TW03] kaldes sådanne funktioner sfæriske:

Definition 7 ([TW03]) Lad $\lambda \in \mathbb{C}$. Funktionen $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes en *sfærisk funktion* svarende til λ , hvis den opfylder:

1. σ er invariant ved rotation om $\mathfrak{o}$

2. $T_1(\sigma) = \lambda\sigma$
3. $\sigma(\mathfrak{o}) = 1$

Vi vil nu finde en forskrift for en sfærisk funktion. Fremgangsmåden er antydnet i [TW03]. Vi begynder med at betragte eksponentialfunktionen $\exp_r : \text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ defineret ved $\exp_r(w) = r^{d(\mathfrak{o}, w)}$. Bemærk, at $\exp_r$ er rotationsinvariant, og $\exp_r(\mathfrak{o}) = 1$. Udregner vi $[T_1(\exp_r)]$ i et $v \neq \mathfrak{o}$ får vi

$$\begin{aligned} [T_1(\exp_r)](v) &= \sum_{d(v, w)=1} r^{d(\mathfrak{o}, w)} \\ &= qr^{d(\mathfrak{o}, v)+1} + r^{d(\mathfrak{o}, v)-1} \\ &= (qr + r^{-1}) \exp_r(v), \end{aligned} \quad (15)$$

da v har q naboer w , så $d(\mathfrak{o}, w) = d(\mathfrak{o}, v) + 1$, og én nabo, så $d(\mathfrak{o}, w) = d(\mathfrak{o}, v) - 1$. Udregnet i $\mathfrak{o}$ får vi:

$$\begin{aligned} [T_1(\exp_r)](\mathfrak{o}) &= \sum_{d(\mathfrak{o}, w)=1} r^{d(\mathfrak{o}, w)} \\ &= (q + 1)r \end{aligned} \quad (16)$$

Hvis r opfylder $\lambda = qr + r^{-1}$, vil transformationen T_1 skalere $\exp_r$ med faktoren λ i alle punkter $v \neq \mathfrak{o}$. For at have en sfærisk funktion mangler vi kun, at funktionen også skaleres med λ i $\mathfrak{o}$. Ligningen $\lambda = qr + r^{-1}$ er ækvivalent med $qr^2 - \lambda r + 1 = 0$. Vi skriver $\{r_+, r_-\}$ for mængden af rødder i $qu^2 - \lambda u + 1$, således at $[T_1(\exp_{r_{\pm}})](v) = \lambda v$ for $v \neq \mathfrak{o}$. Vi finder den sfæriske funktion som en linearkombination

$$\sigma = a_+ \exp_{r_+} + a_- \exp_{r_-} \quad (17)$$

En sådan linearkombination er rotationsinvariant og opfylder

$$[T_1(\sigma)](v) = \lambda \sigma(v) \quad \text{for } v \neq \mathfrak{o} \quad (18)$$

$$[T_1(\sigma)](\mathfrak{o}) = (q+1)(a_+r_+ + a_-r_-) \quad (19)$$

$$\sigma(\mathfrak{o}) = a_+ + a_- \quad (20)$$

Hvis vi afstemmer koefficienterne a_+ og a_- , så $(q+1)(a_+r_+ + a_-r_-) = \lambda$ og $a_+ + a_- = 1$, vil σ være en sfærisk funktion som ønsket. Vi finder passende $a_{\pm}$ ved at skrive disse to ligninger som

$$\begin{pmatrix} (q+1)r_+ & (q+1)r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $r_+ \neq r_-$ eller tilsvarende $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ kan dette inverteres til

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \frac{1}{(q+1)(r_+ - r_-)} \begin{pmatrix} 1 & -(q+1)r_- \\ -1 & (q+1)r_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi konkluderer for $r_+ \neq r_-$, at $\sigma = a_+ \exp_{r_+} + a_- \exp_{r_-}$ er en sfærisk funktion svarende til λ med a_+ og a_- givet ved:

$$a_+ = \frac{\lambda - (q+1)r_-}{(q+1)(r_+ - r_-)} \quad a_- = \frac{\lambda - (q+1)r_+}{(q+1)(r_- - r_+)}$$

Da $r_{\pm}$ er rødderne i $qu^2 - \lambda u + 1 = q(u - r_+)(u - r_-)$, har vi $\lambda = q(r_+ + r_-)$, så koefficienterne bliver til

$$a_+ = \frac{qr_+ - r_-}{(q+1)(r_+ - r_-)} \quad a_- = \frac{qr_- - r_+}{(q+1)(r_- - r_+)}$$

Vi kan nu give en forskrift for en sfærisk funktion ved at indsætte $\exp_r(w) = r^{d(\mathfrak{o}, w)}$ i (17):

Sætning 8 *Antag $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ og lad $\{r_+, r_-\}$ betegne rødderne i polynomiet $qu^2 - \lambda u + 1$. Da er $\sigma : v \mapsto s_{q,\lambda}(d(\mathfrak{o}, v))$ en sfærisk funktion svarende til egenværdien λ , hvor $s_{q,\lambda}(n)$ er givet ved*

$$s_{q,\lambda}(n) = a_+ r_+^n + a_- r_-^n$$

med koefficienterne

$$a_+ = \frac{1}{q+1} \left(\frac{qr_+ - r_-}{r_+ - r_-} \right) \quad a_- = \frac{1}{q+1} \left(\frac{qr_- - r_+}{r_- - r_+} \right) \quad (21)$$

Middelværdi over en cirkel

Vi antager nu, at $\phi : \text{vert}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ opfylder $T_1 \phi = \lambda \phi$. Ved korollar 6 har vi $T_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi$, så for at forstå $T_n(\phi)$ skal vi bare kende $P_n(\lambda)$. I beviset for følgende korollar bestemmes denne værdi vha. den netop udregnede sfæriske funktion σ :

Korollar 9 *Antag, at $\phi \in \mathbb{C}^{\text{vert}(X)}$ opfylder $T_1(\phi) = \lambda \phi$ med $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$. Da gælder*

$$T_n(\phi) = \#C_n(\mathfrak{o}) s_{q,\lambda}(n) \phi \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

hvor $s_{q,\lambda}(n)$ er som i ovenstående sætning, og

$$C_n(v) = \{w \in \text{vert}(X) \mid d(v, w) = n\}$$

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Det følger af korollar 6 at $T_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi$. Vi konstruerer den sfæriske funktion σ svarende til λ som beskrevet i sætning 8. Da $T_1(\sigma) = \lambda \sigma$, har vi $T_n(\sigma) = P_n(\lambda)\sigma$, og ved udregning i $\mathfrak{o}$ ser vi:

$$\sum_{d(\mathfrak{o}, w) = n} \sigma(w) = P_n(\lambda) \sigma(\mathfrak{o}) = P_n(\lambda)$$

Da $\sigma(v) = s_{q,\lambda}(d(\mathfrak{o}, v))$, bliver ovenstående til

$$P_n(\lambda) = \#(C_n(\mathfrak{o})) s_{q,\lambda}(n)$$

□

Vi kan nu skrive den gennemsnitlige værdi af egenfunktionen ϕ over en "cirkel med radius n og centrum i $\mathfrak{o}$ ", dvs. over alle knuder i afstanden n til $\mathfrak{o}$. Vi har nemlig ved (22), at

$$\frac{1}{\#(C_n(\mathfrak{o}))} \sum_{d(\mathfrak{o}, w)=n} \phi(w) = \frac{[T_n(\phi)](\mathfrak{o})}{\#C_n(\mathfrak{o})} = s_{q,\lambda}(n)\phi(\mathfrak{o}) \quad (23)$$

Ved at specialisere til Cayley-grafen for den fri gruppe og vælge

$$\phi = \chi_\epsilon : \gamma \mapsto \exp(i\epsilon \cdot \text{Log}(\gamma))$$

får vi den karakteristiske funktion for $\text{Log}(Y_n)$:

Korollar 10 *Den karakteristiske funktion f_{μ_n} for fordelingen af $\text{Log}(Y_n)$ kan udregnes ved flg. procedure: Skriv $q+1 = 2m$ og lad*

$$\lambda(\epsilon) = 2 \sum_{j=1}^m \cos(\epsilon_j)$$

Hvis $\lambda(\epsilon) \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$, lader vi r_+ og r_1 være rødderne i $qu^2 - \lambda(\epsilon)u + 1$ og skriver

$$a_+ = \frac{1}{q+1} \left(\frac{qr_+ - r_-}{r_+ - r_-} \right) \quad a_- = \frac{1}{q+1} \left(\frac{qr_- - r_+}{r_- - r_+} \right) \quad (24)$$

Da er den karakteristiske funktions værdi i ϵ givet ved

$$f_{\mu_n}(\epsilon) = a_+ r_+^n + a_- r_-^n \quad (25)$$

Bevis. χ_ϵ er multiplikativ, så vi har

$$[T_1(\chi_\epsilon)](\gamma) = \left(\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta) \right) \chi_\epsilon(\gamma)$$

Egenværdien i parentes til højre kan skrives

$$\sum_{j=1}^m \chi_\epsilon(a_j) + \chi_\epsilon(a_j^{-1}) = \sum_{j=1}^m \exp(\epsilon_j) + \exp(-\epsilon_j)$$

Hvilket giver udtrykket for $\lambda(\epsilon)$. Vi har nu $T_1(\chi_\epsilon) = \lambda(\epsilon)\chi_\epsilon$, så ved ligning (23) kan vi skrive udtrykket for den karakteristiske funktion som

$$f_{\mu_n}(\epsilon) = \frac{1}{\#\Gamma_n} \sum_{wl(\gamma)=n} \chi_\epsilon(\gamma) = s_{q,\lambda(\epsilon)}(n) \chi_\epsilon(\mathfrak{e}) = s_{q,\lambda(\epsilon)}(n)$$

for $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$. Konklusionen følger ved at udregne $s_{q,\lambda(\epsilon)}(n)$ med proceduren i sætning 8. $\square$

Konvergens af logaritmen i den fri gruppe

Vi er nu klar til at vise, at fordelingerne $\eta(n)\mu_n$ konvergerer mod en normalfordeling for en passende normalisering $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Vi går frem ved at vise den punktvis konvergens af de karakteristiske funktioner f_{ν_n} for $\nu_n = \eta(n)\mu_n$, dvs. at

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(\eta(n)t)$$

konvergerer for alle t . Jo længere ord γ vi har, desto større kan $\text{Log}(\gamma)$ blive. For at få en normaliseret stokastisk variabel $\eta(n) \text{Log}(Y_n)$

vil vi derfor søge η blandt funktioner med $\eta(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$. Korollar 10 giver en procedure for at udregne $f_{\mu_n}(\epsilon = \eta(n)t)$. Bemærk, at $r_{\pm}$ og $a_{\pm}$ i dette udtryk afhænger af n , og at vi vælger vores variable i rækkefølgen:

$$n \Rightarrow \epsilon = \eta(n)t \Rightarrow \lambda(\epsilon) \Rightarrow r_{\pm} \Rightarrow a_{\pm}$$

Vi vil nu undersøge, hvordan hvert led i kæden opfører sig for $n \rightarrow \infty$ og fastholdt t . Da $\eta(n) \rightarrow 0$, vil $\epsilon = \eta(n)t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \epsilon$ for alle t , og for $\epsilon \rightarrow \epsilon$ har vi

$$\lambda(\epsilon) = 2 \sum_{j=1}^m \cos(\epsilon) \rightarrow 2m = q + 1$$

Korollar 10 specificerer ikke, hvilken rod navngives r_+ og hvilken er r_- . Rødderne i $qu^2 - \lambda u + 1$ er $\{1, q^{-1}\}$ for $\lambda = q + 1$, så vi kan navngive rødderne $r_+(\lambda)$ og $r_-(\lambda)$ for hvert λ , sådan at:

$$r_+(\lambda) \rightarrow 1 \quad r_-(\lambda) \rightarrow q^{-1} \quad \text{for } \lambda \rightarrow q + 1 \quad (26)$$

Mere præcist bruger vi rodformlen og skriver $r_{\pm}(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q}}{2q}$. Vi definerer funktionerne a_+, a_- af en variabel λ ved formelen (24), hvor vi lader r_+, r_- betegne de netop omtalte funktioner af λ . Da $r_+(\lambda) \rightarrow 1, r_-(\lambda) \rightarrow q^{-1}$ konvergerer koefficienterne:

$$a_+(\lambda) \rightarrow 1 \quad a_-(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{for } \lambda \rightarrow q + 1$$

Da λ vil afhænge af $\epsilon = \eta(n)t$, indfører vi flg. notation:

Notation 3

$$r_{\pm} \{\epsilon\} = r_{\pm} \circ \lambda(\epsilon)$$

$$r_{\pm}[n] = r_{\pm} \{\eta(n)t\} \quad a_{\pm}[n] = a_{\pm} \circ \lambda(\eta(n)s)$$

så vi kan skrive

$$f_{\mu_n}(\eta(n)s) = \left(a_+[n] (r_+[n])^n + a_-[n] (r_-[n])^n \right) \quad (27)$$

De relevante grænseovergange er

$$\begin{array}{lll} \eta(n)t & \rightarrow & 0 & n \rightarrow \infty \\ \lambda(\epsilon) & \rightarrow & q+1 & \epsilon \rightarrow 0 \\ (r_+(\lambda), r_-(\lambda)) & \rightarrow & (1, q^{-1}) & \lambda \rightarrow q+1 \\ (a_+(\lambda), a_-(\lambda)) & \rightarrow & (1, 0) & \lambda \rightarrow q+1 \end{array}$$

Ovenstående giver specielt $|r_-[n]| \leq 0.9|r_+[n]|$ for n tilstrækkeligt stor, så vi har $(r_-[n])^n = o[(r_+[n])^n]$ for $n \rightarrow \infty$.

For samme grænseovergang har vi $a_+[n] \rightarrow 1$, $a_-[n] \rightarrow 0$, så (27) bliver asymptotisk:

$$f_{\mu_n}(\eta(n)t) \sim (r_+[n])^n = (r_+ \{ \eta(n)t \})^n \quad (28)$$

for $n \rightarrow \infty$. Bemærk ligheden af $(r_+[n])^n$ med udtrykket $(1 + c/n)^n$, som opfylder

$$(1 + c/n)^n \rightarrow e^c \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Ligning 30 nedenfor generaliserer dette for at finde $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_+[n])^n$:

Lemma 11 *For en differentiabel funktion g defineret på $(0, \delta)$ med $g(x) \rightarrow 1$ og $g'(x) \rightarrow \partial_0$ for $x \rightarrow 0$ gælder, at*

$$g(x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{\partial_0} \quad x \rightarrow 0 \quad (29)$$

Specielt får vi ved valget $x = 1/n$, at

$$g(1/n)^n \rightarrow e^{\partial_0} \quad n \rightarrow \infty \quad (30)$$

Bevis. Skriver vi logaritmen af venstresiden, får vi

$$\log(g(x)^{1/x}) = \frac{\log g(x)}{x} \sim \frac{(\log g(x))'}{x'} = \frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow \partial_0$$

hvor vi bruger l'Hôpitals regel. $\square$

Funktionen g i lemmaet skal nu vælges, så

$$g(1/n) = (r_+[n])^n = (r_+ \circ \lambda(\eta(n)t))^n \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

Vi skriver definitionen af den indre funktion $\lambda(\eta(n)t)$ ud:

$$\lambda(\eta(n)t) = 2 \sum_{j=1}^m \cos(\eta(n)t) = 2 \sum_{j=1}^m \left[1 - \frac{t_j^2}{2} \eta(n)^2 + \frac{t_j^4}{4!} \eta(n)^4 \dots \right]$$

og bemærker, at det lignende udtryk

$$\tilde{\lambda} : x \longmapsto = 2 \sum_{j=1}^m \left[1 - \frac{t_j^2}{2} x + \frac{t_j^4}{4!} x^2 \dots \right]$$

er kontinuert differentiabel med $\tilde{\lambda}'(0) = -\sum_{j=1}^m t_j^2$. Da $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(\sqrt{x}t)$ for $x > 0$, får vi

$$\lambda(\sqrt{x}t)' \rightarrow -\sum_{j=1}^m t_j^2 = -\|t\|^2$$

for $x \rightarrow 0$. Dette antyder valget

$$g(x) = r_+ \circ \lambda(\sqrt{x}t)$$

Vi kan differentiere $\lambda \mapsto r_+(\lambda)$ via rodformlen, så på området $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ har vi:

$$r'_+(\lambda) = \frac{1}{2q} + \frac{\lambda}{2q\sqrt{\lambda^2 - 4q}} \rightarrow \frac{1}{q-1} \quad \text{for } \lambda \rightarrow q+1$$

Ved kædereglene kan vi skrive

$$[\partial_x r_+ \circ \lambda(\sqrt{xt})]_{x=x_0} \longrightarrow -\frac{\|t\|^2}{q-1} \quad \text{for } x_0 \rightarrow 0$$

Da $r_+ \{\sqrt{xt}\} \rightarrow 1$ for $x \rightarrow 0$, giver lemma 11

$$\left(r_+ \left\{ \frac{t}{\sqrt{n}} \right\}\right)^n \rightarrow \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{q-1}\right) \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Det følger af (28), at den karakteristiske funktion f_{ν_n} for $\text{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ opfylder

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{q-1}\right) = \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2} \frac{1}{m-1}\right)$$

Grænsefunktionen på højre side er den karakteristiske funktion for normalfordelingen med variansmatrice $I/(m-1)$. Vi konkluderer ved Lévy (sætning 2), at fordelingen af $\text{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ konvergerer svagt mod denne normalfordeling. Vi husker definitionen 3 af svag konvergens og konkluderer:

Sætning 1 (forenklet variant af [PR05]) Lad Y_n være ligefordelt på Γ_n . For Borelmængder $B \subset \mathbb{R}^m$, hvor Lebesgue-målet af ∂B er 0, gælder

$$\mathbb{P}\left(\frac{\text{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m-1}{2\pi}\right)^{r/2} \int_B e^{-\frac{m-1}{2}\|x\|^2} dx$$

□

Anvendelse

Vi lader nu $m = 2$ og vender tilbage til byen $\mathbb{Z}^2$ fra begyndelsen af artiklen. Hvad er mon sandsynligheden for at ende længere end 10km væk fra startpunktet efter at have kørt en 100km lang tur uden u-vendinger i $\mathbb{Z}^2$? Husk, at den stokastiske variabel Y_n repræsenterer en tilfældig n kilometer lang rute med start i $(0,0)$. $\text{Log}(Y_n)$ er slutpunktet for denne rute. Det ønskede udfald kan derfor skrives som

$$\|\text{Log}(Y_{100})\| \geq 10$$

Hvis vi lader $m = 2$ og vælger $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$, giver sætning 1

$$P(\|\text{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n}) = \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\|x\| \geq 1} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx$$

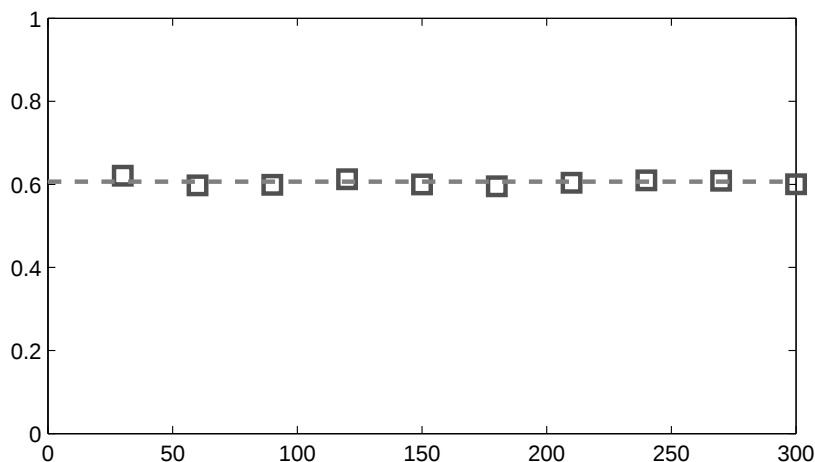
$P(\|\text{Log}(Y_{100})\| \geq 10)$ er det 100. led i denne følge, så vi gætter på, at det ligger tæt på grænseværdien på højresiden. Integralet kan udregnes ved at gå over til polære koordinater med radius betegnet ved R og derpå substituere $S = R^2/2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\|x\| \geq 1} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx = \int_{R=1}^{\infty} e^{-\frac{R^2}{2}} R dR = \int_{S=1/2}^{\infty} e^{-S} dS = e^{-1/2}$$

Vores tilnærmede sandsynlighed for at ende længere end 10km væk fra startpunktet er altså:

$$P(\|\text{Log}(Y_{100})\| \geq 10) \approx e^{-1/2} \approx 0,607$$

At dette overslag er præcist kan ses på nedenstående plot, hvor vi sammenligner med de eksakte værdier af $P(\|\text{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n})$ udregnet med computer.



Figur 3 plot med n på førsteaksen og $P(\|\text{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n})$ på andenaksen. Den stiplede linje er $e^{-1/2}$.

Computeren begynder så småt at give op for n større end 300 med den algoritme, vi anvender – her kan vores grænseværdisætning heldigvis tage over.

Litteratur

- [Bil95] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1995.
- [Han09] E. Hansen, *Measure theory*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2009.
- [ILK71] I.A. Ibragimov, I.U.V. Linnik, and J.F.C. Kingman, *Independent and stationary sequences of random variables*,

Wolters-Noordhoff series of monographs and textbooks on pure and applied mathematics, Wolters-Noordhoff., 1971.

- [PR05] Yiannis N. Petridis and Morten S. Risager, *Discrete logarithms in free groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2005), no. 4, 1003–1012.
- [Riv10] Igor Rivin, *Growth in free groups (and other stories)—twelve years later*, Illinois J. Math. **54** (2010), no. 1, 327–370.
- [TW03] Audrey Terras and Dorothy Wallace, *Selberg’s trace formula on the k -regular tree and applications*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2003** (2003), 501–526.
- [VN94] A. B. Venkov and A. M. Nikitin, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs, and some problems of mathematical physics*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), no. 3, 419–484.