# Kuratowskis afslutnings- og komplementopgave

*Rune Esdahl-Schou*

Da jeg forleden en dag befandt mig i en lænestol forsynet med noget letlæst litteratur, i dette tilfælde Kelleys General Topology, faldt jeg over en interessant opgave, som jeg gerne vil dele med jer.

Før selve formuleringen af opgaven kommer her et par sætninger fra punktmængdetopologien der har motiveret idéen til opgaven. Givet en mængde $A$ i et topologisk rum kan vi betragte afslutningen af $A$, denne mængde er som regel forskellig fra $A$ selv. Men hvis vi betragter afslutningen af afslutningen af $A$ ender vi blot med afslutningen af $A$. Sagt lidt mere præcist (og mindre forståligt), Kuratowskis afslutningsoperator er idempotent. Vi kan dog beskrive afslutningen af $A$ ved at benytte os af komplementærdannelse og indre punkter, noget man ofte ser brugt i litteraturen. Således ser vi altså at komplementet til de indre punkter i $A$ præcis er afslutningen af $A$'s komplement. Dette leder til følgende opgave, oprindeligt formuleret af Kuratowski tilbage i 1920'erne:

Givet et topologisk rum og en delmængde $A$ heri, hvor mange forskellige mængder kan man da konstruere udelukkende ved at benytte sig at afslutning- og komplementærdannelse?

De fleste kan nok hurtigt finde frem til en fem eller seks forskellige mængder, men her er det topologien der sætter grænsen, og ikke fantasien. Såfremt du ønsker selv at regne dig frem til svaret, bør du vente med at læse resten af artiklen.

I det følgende vil vi få brug for lidt notation for at gøre udregningerne lidt lettere. Til enhver delmængde $A$ af et topologisk rum benytter vi derfor $cA$ til at betegne komplementet til $A$ og

$aA$ til at betegne afslutningen af $A$. Som det allerede er nævnt gælder følgende to identiteter:

$$ccA = A,$$
$$aaA = aA.$$

Der gælder dog også en tredje og måske knap så åbenlyst identitet, nemlig følgende:

$$acacacacA = acacA.$$

For at indse at den tredje identitet gælder, lader vi $iA$ betegne de indre punkter i $A$. Vi ser nu at

$$iA = cacA,$$

og dermed ved at tage afslutningen på begge sider

$$aiA = acacA.$$

Det er altså derfor nok at indse følgende identitet, som følger direkte fra definitionen af indre punkter og afslutning.

$$aiaiA = aiA.$$

Vi ser nu at vi kan besvare opgaven ved at se, hvor mange forskellige ord vi kan danne på de to bogstaver $a$ og $c$ uden at der optræder to $a$'er eller to $c$'er efter hinanden når $acacacac = acac$. Dette giver os følgende liste hvor vi er startet med $c$:

$$cA, acA, cacA, acacA, cacacA, acacacA, cacacacA$$

Tager vi afslutningen af den sidste, får vi som bekendt ikke noget nyt, så der er altså højst 7 nye mængder som er mulige på denne måde. Vi ser nu på listen hvor vi er startet med $a$:

$$aA, caA, acaA, cacaA, acacaA, cacacaA$$

Tager vi afslutningen af den sidste, ser vi at

$$\begin{aligned} acacacaA &= acacaca(ccA) &&= acacacac(cA) \\ &= acac(cA) &&= aca(cc)A &&= acaA. \end{aligned}$$

Vi ser altså at vi højst kan opnå 14 forskellige mængder. Dette leder dog hurtigt til et nyt spørgsmål: Findes der overhovedet så mærkelige topologiske rum hvor det kan lade sig gøre at konstruere 14 forskellige mængder på denne måde, og hvor syret en mængde skal man starte med?

Det er heldigvis ikke særlig svært at finde et topologisk rum og en mængde med de ønskede egenskaber. Faktisk kan vi finde en delmængde af de reelle tal der har den ønskede egenskab og det er selv om de reelle tal er udstyret med den euklidiske topologi! Mængden behøver faktisk heller ikke engang være specielt grim eller besværlig at skrive op, f.eks. virker følgende:

$$(0,1) \cup (1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q}).$$

Det overlades som en opgave til læseren at vise denne mængde rent faktisk giver anledning til 14 forskellige mængder ved at benytte ovenstående.

## Litteratur

[1] John Kelley *General Topology*. Van Nostrand, 1955.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_closure-complement_problem