Abefest

– Løsninger til sidste bloks ekstraopgave

Sune Precht Reeh og Thor Kampmann Baastrup

Opgaveformulering for sidste bloks ekstraopgave

Peter Pedal og hans fire venner har været ude at plukke bananer. Da de er trætte, beslutter de sig for at vente med at fordele bananerne og lægger sig til at sove. I løbet af natten står Peter Pedal op og deler bananerne op i fem lige store bunker. Der er en banan tilovers, som han spiser. Han gemmer derefter sin egen bunke og lægger resten tilbage. Efter han har lagt sig til at sove, står en af vennerne op og gør det samme. Dette gentager sig for alle fem aber. Om morgenen deler de sammen bananerne op i fem lige store bunker, igen med en banan i rest, som går til manden med den gule hat[1]*. Spørgsmålet er så: Hvor mange bananer kan der mindst have været i den oprindelige bunke?*

Løsning af ekstraopgaven ved Sune

Lad b være antallet af bananer i bunken ved nattens begyndelse. Peter Pedal spiser en banan og deler resten i 5 bunker af størrelse n_1, dvs. $b = 1+5n_1$, hvorefter Peter Pedal skjuler n_1 af bananerne. Herefter er der $4n_1$ bananer i bunken.

Abe nummer 2, spiser en banan og deler resten i 5 bunker af størrelse n_2, dvs. $4n_1 = 1 + 5n_2$, og aben efterlader $4n_2$ bananer i bunken (og skjuler n_2 bananer). Således fortsætter natten: Abe 3 skjuler n_3 bananer, abe 4 skjuler n_4 bananer og abe 5 skjuler n_5 bananer; hvor vi har $4n_i = 1 + 5n_{i+1}$ for $i = 1, 2, 3, 4$.

[1] Peter Pedals adoptivfar

Da det bliver morgen, er der $4n_5$ bananer i bunken, og de bliver fordelt i 5 bunker af k bananer hver – samt en enkelt banan til "manden med den gule hat". Altså $4n_5 = 1 + 5k$.

Ved gentagen substitution udtrykker vi nu b ved k og får

$$b = 1 + \tfrac{5}{4}[1 + \tfrac{5}{4}(1 + \tfrac{5}{4}\{1 + \tfrac{5}{4}[1 + \tfrac{5}{4}(1 + 5k)]\})].$$

Vi forlænger med 4^5 og får en heltalsligning:

$$\begin{aligned} 4^5 b &= 4^5 + 4^4 5^1 + 4^3 5^2 + 4^2 5^3 + 4^1 5^4 + 5^5 + 5^6 k \\ &= \frac{5^6 - 4^6}{5 - 4} + 5^6 k = 5^6 - 4^6 + 5^6 k \\ &= 5^6(1 + k) - 4^6. \end{aligned}$$

Vi forkorter derefter straks med 4^5 igen:

$$b = 5^6 \cdot \frac{1 + k}{4^5} - 4.$$

Såfremt vi vil have en heltalsløsning, skal $5^6 \cdot \frac{1+k}{4^5}$ nødvendigvis være et heltal. 4 og 5 er dog indbyrdes primiske, så $c := \frac{1+k}{4^5}$ skal være heltallig. Omvendt vil enhver værdi af $c \in \mathbb{Z}$ give en heltallig løsning med $k = 4^5 c - 1$ og $b = 5^6 c - 4$. Det mindste ikke-negative løsningspar, fås ved $c = 1$ hvor $k = 4^5 - 1 = 1023$ og $b = 5^6 - 4 = 15621$.

Der var altså mindst 15621 bananer i bunken oprindeligt, og næste mulighed er 31246 bananer.

I tilfældet med 15621 bananer til start kan vi desuden oplyse, at Peter Pedal får tilraget sig $1 + n_1 + k = 1 + 3124 + 1023 = 4148$ bananer, mens abe nummer 5 kun får $1 + n_5 + k = 1 + 1279 + 1023 = 2303$ bananer, og stakkels "manden med den gule hat" får kun en enkelt banan (men han har trods alt heller ikke hjulpet med at plukke bananerne).

Løsning af ekstraopgaven ved Thor

Af oplysningerne fremkommer følgende ligninger, hvor b er antallet af bananer til start, og x_i, $i = 1, ..., 5$ er antallet af bananer, som abe nr i lægger til side, og x_6 er antallet af bananer, som hver abe får til slut:

$$\begin{aligned}
b &= 5x_1 + 1\\
b &= 5x_2 + x_1 + 2\\
b &= 5x_3 + x_2 + x_1 + 3\\
b &= 5x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 4\\
b &= 5x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 5\\
b &= 5x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 6
\end{aligned}$$

Det giver anledning til at skrive ligningssystemet op på matrixform efter at have rykket lidt rundt:

$$\begin{bmatrix}
1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 3\\
1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 4\\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 5\\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 6
\end{bmatrix}$$

Denne matrix kan ved rækkeoperationer omdannes til:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{15625}{1024} & \frac{11529}{1024} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3125}{1024} & \frac{2101}{1024} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{625}{256} & \frac{369}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{125}{64} & \frac{61}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Af den øverste række har vi altså:

$$b = \frac{11529}{1024} + \frac{15625}{1024}x_6$$

Siden både b og x_6 skal være heltal, skal der gælde at:

$$11529 + 15625x_6 \equiv 0 \mod 1024,$$

dvs. at

$$265 + 265x_6 = 265(x_6 + 1) \equiv 0 \mod 1024$$

Vi kan faktorisere 265 og 1024 for at se, om de har nogen fælles primfaktorer, for at tjekke om $x_6 + 1$ kan være mindre end 1024. Da $265 = 5 \cdot 53$ og $1024 = 2^{10}$, har de ikke nogen fælles primfaktorer, så der må gælde, at:

$$x_6 + 1 \equiv 0 \mod 1024, \text{ hvorved } x_6 \equiv 1023 \mod 1024.$$

1023 er altså mindste heltallige bud[2] på x_6, og sætter vi dette ind får vi:

[2] Vi ved endnu ikke, om denne værdi for x_6 giver heltallige værdier for øvrige x_i

$$
\begin{aligned}
b &= \tfrac{11529}{1024} + \tfrac{15625\cdot 1023}{1024} &&= 15621\\
x_1 &= \tfrac{15621-1}{5} &&= 3124\\
x_2 &= \tfrac{15621-2-3124}{5} &&= 2499\\
x_3 &= \tfrac{15621-3-3124-2499}{5} &&= 1999\\
x_4 &= \tfrac{15621-4-3124-2499-1999}{5} &&= 1599\\
x_5 &= \tfrac{15621-5-3124-2499-1999-1599}{5} &&= 1279
\end{aligned}
$$

Alle bunkerne er altså heltal. Dermed må $b = 15621$ være det mindste antal bananer, der var fra start.
Der er nogle aber, som får hård mave i morgen (manden med den gule hat er ret beskeden).