FAMØS

FAMØS september 2013
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Nilin Abrahamsen (forside)

Deadline for næste nummer:
18. oktober 2013

Indlæg modtages gerne og bedes sendt til `famos@math.ku.dk` – gerne i LaTeX og gerne baseret på skabelonen som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Oplag: 400 stk.
ISSN: 1903-2722

23. årgang, nr. 1, september 2013

FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
23. årgang, nr. 1, september 2013

SuperSune:
Præmieopgaveløseren af stål

Redaktion

DIT NAVN KUNNE STÅ PÅ DENNE SIDE!

Hvad venter du på? Skriv til `famos@math.ku.dk`
i dag, og bliv redaktør i morgen!

Litteratur

[1] Jacobsen, M., *Videregående Sandsynlighedsregning*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 3. udgave, 2003

[2] Wichmann, B. A. & Hill, I. D., *Algorithm AS 183: An Efficient and Portable Pseudo-Random Number Generator*, Applied Statistics, Vol 31, No. 2 (1982), 188–190

Listing 2 C++ kode

```
//: MC_intro:Uniform.cpp
// Generate pseudo random numbers uniformly between 0 and 1
#include <iostream>
#include <math.h> // For using "fmod()"
using namespace std;

float uniform(){
    // A sequence of initial values
    static int x = 5;
    static int y = 11;
    static int z = 17;

    // Some integer arithmetic required
    x = 171 * (x % 177) - 2 * (x / 177);
    y = 172 * (y % 176) - 35 * (y / 176);
    z = 170 * (z % 178) - 63 * (z / 178);

    /* If both operands are nonnegative then the
    remainder is nonnegative; if not, the sign of
    the remainder is implementation-defined. */
    if(x < 0)
        x = x + 30269;
    if(y < 0)
        y = y + 30307;
    if(z < 0)
        z = z + 30323;

    return fmod(x / 30269. + y / 30307. + z / 30323., 1.);
}

int main(){
    // Print 5 random numbers
    for(int i = 0; i < 5; ++i){
        cout << uniform() << ", ";
    }
}///:~
```

I næste artikel diskuteres, hvorledes pseudotilfældige tal bekvemt og effektivt kan bruges til frembringe af stokastiske variable til brug i en Monte Carlo-model.

Indhold

Introduktion til ES01

– Fem HV-spørgsmål med tilhørende svar

Maria Bekker-Nielsen Dunbar

Hvad er ES01?

ES01 er studenterkøkkenet på IMF[1] — et sted at opbevare mad og ting, læse, drikke kaffe, hyggesnakke, lave fællesaftensmad mm.

Hvor er ES01?

ES01 ligger til venstre for auditorie 5 og 6.

Hvem har lov at være i ES01?

IMF-studerende (man skulle ikke tro det ud fra fordelingen af ES01-brugere, men mat-øk- og aktuarstuderende må godt være i køkkenet). Vær endelig ikke bange for at kigge derind!

Hvordan kommer man ind i ES01?

Man får adgang til ES01 ved at udfylde en adgangsseddel (de findes til venstre for døren) og aflevere den til en kortansvarlig. Som kan ses på døren, er kortansvarlige pt Alexander Jasper, Martin Mads og tidligere FAMØSredaktør Kristian Poulsen.

Hvad gælder i ES01?

Reglerne kan læses øverst på adgangssedlen samt diverse sedler, der hænger rundt omkring i lokalet (primært på døre). *Opsummeret*: Hold stedet pænt og lad være med at sove derinde

[1] Det svarer til fysikernes DS01 ('det absolutte rum')

hvor (9) følger af (6), (10) følger af (5), og (11) følger af (8). Da $m_L(A^c) \geqslant 1 - \varepsilon$ konkluderer vi at $m_L(A) < \varepsilon$. Da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, har vi bevist at $m_L(A) = 0$. □

Programmel

En klar-til-brug implementering af den s.k. *Wichmann & Hill*-generator følger. Algoritmen er anstændig nok til personlig brug.

Listing 1 R kode

```
## Generate pseudo random numbers uniformly between 0 and 1
uniform <- local({
    # A sequence of initial values
    x = 5
    y = 11
    z = 17

    # Make x, y and z local static variables.
    f <- function(){
        x <<- 171 * (x %% 177) - 2 * (x %/% 177)
        y <<- 172 * (y %% 176) - 35 * (y %/% 176)
        z <<- 170 * (z %% 178) - 63 * (z %/% 178)

        # The part where we deal with negative x, y and z
        if(x < 0)
            x <<- x + 30269
        if(y < 0)
            y <<- y + 30307
        if(z < 0)
            z <<- z + 30323

        return((x / 30269. + y / 30307. + z / 30323.) %% 1)
    }
})

# Print 5 random numbers
for(i in 1:5){
    print(uniform())
}
```

Det genstår at bevise den anden halvdel. Lad $A \in \mathfrak{I}$ være en T-invariant mængde, $A = T^{-1}(A)$. Vi skal vise, at $m_L(A) = 0$ eller 1. I tilfældet $m_L(A) = 1$ er der intet at vise. Lad os antage at $m_L(A) < 1$ og vise at $m_L(A) = 0$ ved at vise, at $m_L(A) < \varepsilon$ for alle $\varepsilon > 0$.

Lad $I_{n,m} = [(m-1)a^{-n}, ma^{-n})$ for $n \in \mathbb{N}$ og $m = 1, \dots, a^n$. Observér først, at

$$T^k(I_{n,m}) = [\frac{m-1 \mod a^{n-k}}{a^{n-k}}, \frac{m-1 \mod a^{n-k}+1}{a^{n-k}}), \quad (4)$$

for $k \in \{0, \dots, n\}$. Fra (4) har vi, at

$$m_L(T^k(I_{n,m})) = a^k m_L(I_{n,m}). \quad (5)$$

Bemærk dernæst, at

$$T^n(I_{n,m} \cap A^c) \subset T^n(I_{n,m}) \cap T^n(A^c) \subset T^n(I_{n,m}) \cap A^c = A^c, \quad (6)$$

hvor anden inklusion gælder, fordi også A^c er T-invariant og $T(T^{-1}(A^c)) \subset T^{-1}(A^c) = A^c$. Lighedstegnet følger af (4) idet $T^n(I_{n,m}) = [0,1)$. Givet $\varepsilon > 0$ findes et $n \in \mathbb{N}$ og et $m \in \{1, \dots, a^n\}$, således at

$$\varepsilon > \frac{m_L(I_{n,m} \cap A)}{m_L(I_{n,m})}. \quad (7)$$

Dette er ækvivalent med

$$m_L(I_{n,m} \cap A^c) > (1-\varepsilon) m_L(I_{n,m}). \quad (8)$$

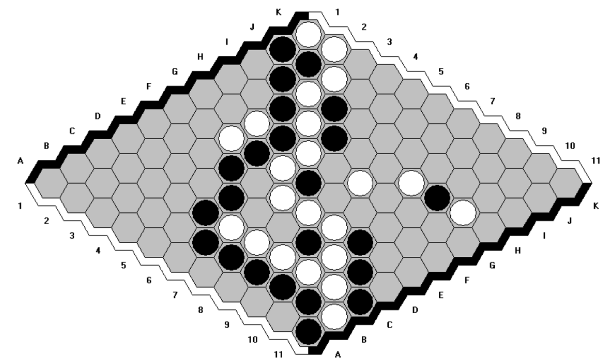
Ved udregning har vi altså, at

$$\begin{aligned} m_L(A^c) &\geqslant m_L(T^n(I_{n,m} \cap A^c)) && (9)\\ &= a^n m_L(I_{n,m} \cap A^c) && (10)\\ &\geqslant a^n(1-\varepsilon) m_L(I_{n,m}) && (11)\\ &= 1-\varepsilon && (12) \end{aligned}$$

Hex
– Et kompliceret spil med simple regler

Bo 'Maling' Malling Christensen

Tidligere i år skrev FAMØS om spillet Go blandt andet kendt fra filmen »A Beautiful Mind«.
Hex er et spil meget i samme stil som Go i den forstand, at spillet, trods dets simple regelsæt, er ekstremt kompliceret at analysere. Man spiller normalt Hex på et diamantformet bræt bestående af 11×11 sekskanter. Ved skiftevis at tage sin tur gælder det om at forbinde en side med dens modstående side med sine brikker.

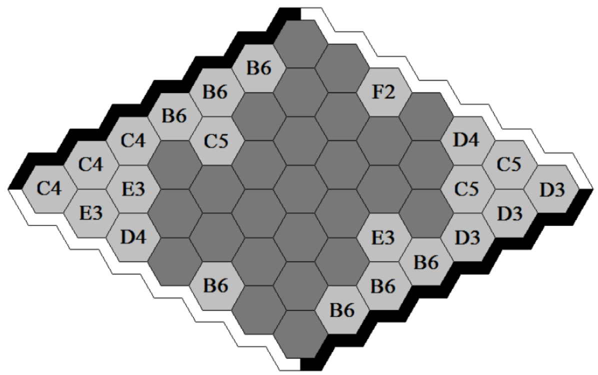


Figur 1 Et afgjort standardspil Hex hvor sort har vundet ved at forbinde $A11$ og $J1$

Selv om Hex i den mest populære udgave (11×11) endnu ikke er blevet løst, end ikke ved hjælp af de kraftigste computere og det bedste software[2], så er mange mindre udgaver løst. Senest er der i 2009 fundet en vindende strategi for hvid på 9×9. Man

[2] Der afholdes årligt konkurrencer, hvor computerprogrammer dyster mod hinanden i endnu ikke løste spil, såsom Go, Skak og Hex.

estimerer imidlertid, at det vil tage *halvandet årtusinde* at løse 10×10 med nuværende udstyr – og derfra er der stadig langt til, at standardudgaven af spillet er løst.



Figur 2 7×7 Hex løst. Ved at starte spillet på de sorte felter kan man gennemtvinge en sejr. De resterende felter angiver, hvor man som nummer to skal spille for at kunne gennemtvinge en sejr, skulle den første spiller starte her.

Man kan ret hurtigt overbevise sig selv om, at Hex aldrig kan ende uafgjort, og der vil altid være netop én vinder. Helt tydeligt kan begge spillere ikke vinde. Omvendt, kan man – ved hjælp af lidt simpel grafteori – vise, at det ikke kan lade sig gøre, at ingen af spillerne får koblet sine sider sammen. Derfor er der kun muligheden tilbage, at spillet altid vil have netop én vinder.

Det er tydeligt, at eftersom samtlige træk kan kortlægges, så kan man lave et såkaldt spiltræ og ud fra dette, finde ud af hvem der har den vindende strategi. Bemærk for 2×2, at hvis hvid

vi, at T er m_L-målbevarende. Dernæst beviser vi, at enhver T-invariant mængde $A \in \mathfrak{I}$ er triviel, i den forstand at A har m_L-mål 0 eller 1.

Bevis. Genkald, at $[\lambda] = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : k \leqslant \lambda\}$ for $\lambda \in \mathbb{R}_+$ og omskriv T på formen

$$T(\omega) = a\omega - [a\omega], \qquad \omega \in [0,1). \tag{2}$$

Det er klart, at T er målelig, og i øvrigt har vi fra (2), at

$$T(\omega) = a\omega - (k-1), \qquad \omega \in \left[\tfrac{k-1}{a}, \tfrac{k}{a}\right), k = 1, \ldots, a. \tag{3}$$

For at bevise at T er m_L-målbevarende, lad $\alpha, \beta \in [0,1)$ med $\alpha < \beta$ være givet. Bemærk først, at fra (3) har vi at

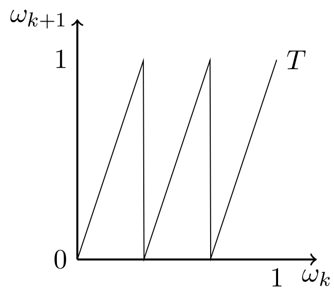
$$T^{-1}([\alpha,\beta)) = \bigcup_{k=1}^{a} [\tfrac{\alpha+k-1}{a}, \tfrac{\beta+k-1}{a}).$$

Herfor finder vi ved udregning, at

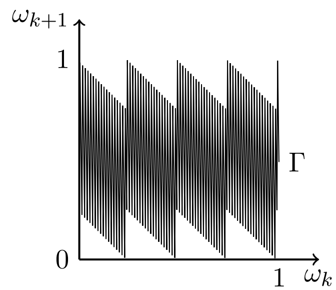
$$\begin{aligned} T(m_L)([\alpha,\beta)) &= m_L(T^{-1}([\alpha,\beta))) \\ &= \sum_{k=1}^{a} m_L([\tfrac{\alpha+k-1}{a}, \tfrac{\beta+k-1}{a})) \\ &= \beta - \alpha \\ &= m_L([\alpha,\beta)). \end{aligned}$$

Bemærk dernæst at $\{[\alpha,\beta) \subset [0,1) : \alpha,\beta \in [0,1), \alpha < \beta\}$ er et fællesmængdestabilt frembringersystem for Borel σ-algebraen $\mathfrak{B}_{[0,1)}$ af delmængder af $[0,1)$. Dette beviser at $T(m_L) = m_L$, altså at T er m_L-målbevarende.

$m \to \infty$. I øvrigt viser det sig, at L er periodisk i den forstand, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, således at den n-foldige sammensætning af L med sig selv er den identiske afbildning. At L er periodisk, er selvfølgelig acceptabelt, *kun hvis* perioden er meget stor.



Figur 2 Den ergodiske transformation $T(\omega = a\omega \mod 1)$ for et $a = 3$.



Figur 3 Den lineære kongruensgenerator for parametre $a = 16838$ og $c/m = 0.236$.

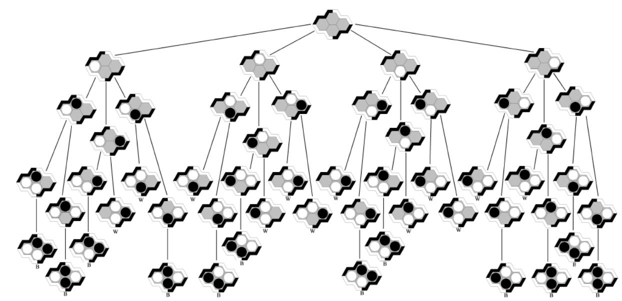
Den lineære kongruens-generator er altså modelleret efter følgende ergodiske transformation. Se figuren for sammenligning.

Sætning 10 *Betragt sandsynlighedsfeltet* $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L)$*. Lad* $a \in \mathbb{N}, a > 1$ *være et naturligt tal. Den målelige afbildning* T *på* $[0,1)$ *ind i* $[0,1)$ *givet ved multiplikation med* a modulo 1*, altså*

$$T(\omega) = a\omega \mod 1, \qquad \omega \in [0,1)$$

er ergodisk.

Note 11 (Bevisskitse) Vi skal bevise, at $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L, T)$ er et ergodisk system. Vi opdeler vores bevis i to trin: Først beviser



Figur 3 Et komplet spiltræ over 2×2.

starter i en af midterpositionerne, så kan han tvinge en sejr hjem. Til gengæld, hvis man starter i de spidse hjørner, så kan sort tvinge en sejr hjem. Det viser sig faktisk, at lige meget hvor stor pladen er, så kan sort altid tvinge en sejr, hvis hvid starter i disse hjørner.

Theorem 1 *Første spiller (hvid) har en vindende strategi på* $n \times n$*.*

Bevis. Vi ved allerede, at en af spillerne har en vindende strategi. Antag det er spiller to (sort).

For n lige:

Lad hvid spille et tilfældigt sted. Da brættet er symmetrisk, og sort har en vindende strategi, kan hvid blot kopiere sorts træk symmetrisk. Skulle sort spille det symmetriske sted til hvids åbningstræk, så spiller hvid bare et nyt tilfældigt sted.

For n ulige:

Lad hvid spille i midterfeltet. Da resten af brættet er symmetrisk, og sort har en vindende strategi, kan hvid blot kopiere sorts træk symmetrisk.

I begge tilfælde vil hvid altid have mindst lige så mange brikker på brættet som sort, og eftersom enhver brik aldrig kan være en ulempe, så står hvid mindst lige så godt stillet som sort. Men sort havde jo en vindende strategi, så vores antagelse må være forkert. Ergo har hvid en vindende strategi. □

Denne strategityveri-taktik er et velkendt bevis for symmetriske spil af denne type. Desværre er det blot et eksistensbevis, så det giver os ingen idé om, hvordan en generel løsning kunne se ud.

For at undgå at hvid lægger for stærkt ud, har man mange steder tilføjet **Swap Rule**, der tillader sort at bytte brikker med hvid efter åbningen af spillet. Dog, eftersom der altid findes en vindende strategi for enten sort eller hvid, kan sort altid vinde spil, der benytter Swap Rule.

Der er analyseret adskillige træk, som gør, at man kan nøjes med at kigge på en brøkdel af kombinationerne, når man prøver at finde de vindende strategier. Kan du gennemskue nogle af dem? Spil spillet et par gange med en ven og se om du kan finde frem til nogle gode tommelfingerregler, og om de altid gælder.

Definition 8 Lad $a, c, m \in \mathbb{Z}_+$ være ikke-negative heltal, således at $0 < a < m$ og $0 \leqslant c < m$. Den lineære kongruens-generator er en afbildning L på $\{0, \ldots, m-1\}$ ind i $\{0, \ldots, m-1\}$ givet ved

$$L(\gamma) = a\gamma + c \mod m, \qquad \gamma \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

Den egentlige produktion af en følge $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ af pseudotilfældige tal i $[0,1)$ under den lineære kongruens-generator fås ved at lade $\gamma_0 \in \{0, \ldots, m-1\}$ være givet og sætte

$$\begin{aligned} \gamma_k &= L^k(\gamma_0), \\ \omega_k &= \gamma_k/m, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Bemærkning 9 Lad Γ være en afbildning på $\{\frac{0}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\}$ ind i $\{\frac{0}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\}$ givet ved

$$\Gamma(\omega) = L(m\omega)/m, \qquad \omega \in \{\tfrac{0}{m}, \ldots, \tfrac{m-1}{m}\}.$$

Fra et matematisk synspunkt er følgen $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ af pseudotilfældige tal frembragt af den lineære kongruens-generator ækvivalent med den af $\omega_0 \equiv \gamma_0/m$ frembragte omløbsbane under Γ, altså

$$\Gamma_{\omega_0} = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}. \tag{1}$$

Det ses endvidere ved udregning, at

$$\Gamma(\omega) = a\omega + \frac{c}{m} \mod 1, \qquad \omega \in \{\tfrac{0}{m}, \ldots, \tfrac{m-1}{m}\}.$$

Lad os tage en time-out til en sludder for en sladder: Den lineære kongruens-generator er altså ikke en pseudotilfældig generator i den ideale forstand, som vi har lagt op til indtil videre, for eksempel er Γ ikke en afbildning på hele $[0,1)$, men med en vederstyggelig brug af notation har vi at $\{\frac{0}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\} \to [0,1)$ dersom

Definition 6 (Pseudotilfældig talgenerator) Lad os betragte sandsynlighedsfeltet $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L)$, hvor m_L er Lebesgue målet på Borel σ-algebraen $\mathfrak{B}_{[0,1)}$ af delmængder af $[0,1)$. Ved en pseudotilfældig talgenerator på $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L)$ mener vi en målelig afbildning Γ på $[0,1)$ ind i $[0,1)$, således at følgende betingelse er opfyldt:

1. Kvadruplet $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L, \Gamma)$ er et ergodisk system.

At bruge Birkhoff ergodesætningen til estimation af integraler er *idéen* bag Monte Carlo-metoder, og fejlen kan estimeres ved hjælp af statistiske standardmetoder.

Korollar 7 *Lad Γ være en pseudotilfældig talgenerator på sandsynlighedsfeltet $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L)$. For enhver mængde $A \in \mathfrak{B}_{[0,1)}$ findes en nulmængde Λ i $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, m_L)$, således at*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(\omega) = m_L(A), \quad \textit{dersom } \omega \in \Lambda^c.$$

Bevis. Følger af Birkhoff's ergodesætning. □

Det er i denne forstand, at omløbsbanerne for en ergodisk afbildning skulle forestille at replikere udfaldsrummet, og det er denne ideale egenskab, vi vil kræve fra en pseudotilfældig talgenerator: Omløbsbanerne for en pseudotilfældig talgenerator rammer A uendeligt ofte med asymptotisk relativ frekvens $m_L(A)$.

Den letteste og mest populære algoritme til frembringelsen af pseudotilfældige tal, den s.k. *lineære kongruens-generator*, blev udviklet af D. H. Lehmer i 1949, og algoritmen for den lineære kongruens-generator er modelleret efter en ergodisk transformation.

Banach-Steinhaus' sætning

Rasmus Sylvester Bryder

Vi vil her give et kort og elementært bevis for Banach-Steinhaus' sætning, også kendt under navnet *Uniform boundedness principle*, hvis anvendelighed har nærmest ingen ende i felter som funktionalanalyse og operatoralgebra. Beviset og dets optakt stammer fra [2].

For normerede rum X og Y og en lineær afbildning $T\colon X \to Y$ defineres

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Der gælder da, at T er kontinuert hvis og kun hvis $\|T\| < \infty$, i hvilket fald $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ for alle $x \in X$ (se fx [1, Sætning 4.6 og 4.8]). Mængden $B(X,Y)$ af kontinuerte lineære afbildninger $X \to Y$ er et vektorrum med punktvis addition og skalarmultiplikation, og $T \mapsto \|T\|$ er en norm på $B(X,Y)$.

Lemma 1 *Lad X og Y være normerede rum og lad $T \in B(X,Y)$. Da vil der for alle $x \in X$ og $r > 0$ gælde*

$$\sup\{\|Tx'\| \mid x' \in X,\ \|x'-x\| < r\} \geq \|T\|r.$$

Bevis. Lad M betegne ovenstående supremum. Idet $\|y - y'\| \leq \|y\| + \|y'\|$ for $y, y' \in X$ grundet trekantsuligheden, har vi at

$$\begin{aligned}\max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} &\geq \frac{1}{2}\left(\|T(x+z)\| + \|T(x-z\|\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\|Tz - (-Tz)\| = \|Tz\|\end{aligned}$$

for alle $z \in X$. For $z \in X$ med $\|z\| < r$ vil $\|(x+z) - x\| < r$ og $\|(x-z) - x\| < r$, hvormed $\max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} \leq M$

og dermed $M \geq \|Tz\|$. Dermed er M et overtal for

$$\{\|Tz\| \mid z \in X,\ \|z\| < r\},$$

hvilket medfører den ønskede ulighed:

$$M \geq \sup\{\|Tz\| \mid z \in X,\ \|z\| \leq r\} = \|T\|r$$

□

Korollar 2 *Lad X og Y være normerede rum og lad $T \in B(X,Y)$. Da vil der for alle $x \in X$ og $r > 0$ findes et $x' \in X$ så $\|x'-x\| \leq r$ og $\|Tx'\| \geq \frac{2}{3}\|T\|r$.*

Bevis. Ovenstående gælder klart hvis $\|T\| = 0$. Hvis $\|T\| \neq 0$, sættes $\varepsilon = \frac{1}{3}\|T\|r$. Jf. ovenstående lemma findes $x' \in X$ med $\|x'-x\| < r$ så $\|Tx'\|+\varepsilon \geq \|T\|r$, hvormed det ønskede følger. □

Sætning 3 (Banach-Steinhaus, 1927) *Lad $\mathfrak{A} \subseteq B(X,Y)$, hvor X er et Banach-rum og Y et normeret rum. Hvis $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|Tx\| < \infty$ for alle $x \in X$, vil $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|T\| < \infty$.*

Bevis. Hvis $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|T\| = \infty$, findes en følge $(T_n)_{n\geq 1}$ i $\mathfrak{A}$ så $\|T_n\| \geq 4^n$ for alle n. Sæt $x_0 = 0$ og benyt Korollar 2 for T_1 og x_0 til at bestemme $x_1 \in X$ med $\|x_1 - x_0\| \leq 3^{-1}$ med $\|T_1x_1\| \geq \frac{2}{3}3^{-1}\|T_1\|$. Ved gentagen brug af Korollar 2 opnås nu en følge $(x_n)_{n\geq 1}$ i X med $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^{-n}$ og $\|T_nx_n\| \geq \frac{2}{3}3^{-n}\|T_n\|$. For

En idé er, at man for en generel målbevarende afbildning T kræver, at enhver T-invariant mængde er triviel som f.eks. Ω og $\emptyset$.

Definition 4 (Ergodisk System) Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt. En målelig afbildning, T, på Ω ind i Ω siges at være ergodisk, hvis følgende betingelser er opfyldt:

1. T er P-målbevarende,
2. For enhver mængde A i den T-invariante σ-algebra $\mathfrak{I}$, så er $P(A) = 0$ eller 1.

Kvadruplet $(\Omega, \mathfrak{F}, P, T)$ kaldes et ergodisk system.

Definitionen af et ergodisk system giver, overraskende nok, løsningen på spørgsmålet. Følgende sætning er endda også ergodeteoriens ubestridte højdepunkt.

Sætning 5 (Birkhoffs ergodesætning) *Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt. Hvis T er en P-målbevarende afbildning på Ω ind i Ω, og X er en integrabel reel stokastisk variabel på Ω, da findes en nulmængde Λ i $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, således at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X \circ T^k(\omega) = \mathbf{E}(X \mid \mathfrak{I})(\omega), \quad \textit{dersom } \omega \in \Lambda^c.$$

Hvis yderligere T er ergodisk, gælder at der findes en nulmængde Λ i $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, således at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X \circ T^k(\omega) = \mathbf{E}(X), \quad \textit{dersom } \omega \in \Lambda^c.$$

Bevis. Se [1]. □

Definition 3 Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt og lad T være en P-målbevarende afbildning på Ω ind i Ω. En mængde $A \in \mathfrak{F}$ siges at være T-invariant, hvis $T^{-1}(A) = A$. Ved den T-invariante σ-algebra, betegnet ved $\mathfrak{I}$, forstås samlingen $\{A \in \mathfrak{F} \colon T^{-1}(A) = A\}$ af T-invariante mængder.

Øvelse: Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt og lad T være en P-målbevarende afbildning på Ω ind i Ω. Bekræft, at den T-invariante σ-algebra $\mathfrak{I}$ faktisk er en σ-algebra.

Øvelse: Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt. Lad T være en P-målbevarende afbildning på Ω ind i Ω og lad $A \in \mathfrak{I}$ være en mængde i den T-invariante σ-algebra. Antag, at $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$ og at $P(A) \in (0,1)$. Vis, at $T(A) \subset A$ og forklar hvorfor det kan være problematisk at bruge T som generator.

I øvelsen er strukturen af den frembragte omløbsbane antaget så simpel, at den ikke lader sig fordele jævnt over hele udfaldsrummet.

Spørgsmål: Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt. Lad T være en målelig afbildning på Ω ind i Ω, og lad T_ω være den af ω frembragte omløbsbane under T. Hvilke yderligere betingelser skal T opfylde, for at følgende betingelse gælder?

1. Der findes en nulmængde Λ i $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, så T_ω i en vis forstand er en replika af Ω for alle $\omega \in \Lambda^c$.

$m > n$ vil

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} 3^{-k} \\
&= 3^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{m-n-1} 3^{-k} \leq \frac{3}{2} 3^{-(n+1)} = \frac{1}{2} 3^{-n},
\end{aligned}$$

så $(x_n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy-følge og konvergerer derfor mod et punkt $x \in X$. Ved at lade $m \to \infty$ i ovenstående fås $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{2} 3^{-n}$, hvormed $\|T_n(x_n - x)\| \leq \|T_n\| \|x_n - x\| \leq \frac{1}{2} 3^{-n} \|T_n\|$ og

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| &\geq \|T_n x_n\| - \|T_n(x_n - x)\| \\
&\geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) 3^{-n} \|T_n\| = \frac{1}{6} 3^{-n} \|T_n\| \\
&\geq \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty,
\end{aligned}$$

så $\sup_{T \in \mathfrak{A}} \|Tx\| = \infty$. Dette viser sætningen. $\square$

Litteratur

[1] Berg, Christian, *Metriske rum*, Matematisk afdeling, Københavns Universitet, 1997.

[2] Sokal, Alan D., *A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem*, American Mathematical Monthly, 2010.

Hvad er et tal?

Dan Saattrup Nielsen

Det virker måske som et spøjst spørgsmål, men ved nærmere eftertanke virker det som om, at alle vores definitioner af tal refererer til andre matematiske begreber. F.eks. kunne man måske sige, at tallet 1 var det objekt, der repræsenterede antallet af næser, du har (hvis vi antager, at du er et nogenlunde normalt menneske); eller hvis man er til mængdelære, ville man måske definere 1 som $\{\emptyset\}$. Men begge disse metoder beskriver blot tallet 1 med hhv. kardinaliteter og mængder. Er det ikke muligt, at definere hvad et tal er uafhængigt af anden matematik?

Dette er, hvad matematikeren og filosoffen Gottlob Frege (1848-1925) ville prøve at give sig i kast med. Nærmere betegnet ville han gerne kunne definere alle de naturlige tal udelukkende ved brug af logik[3]. Han fik opbygget en yderst elegant og intuitiv teori, som dog senere hen blev angrebet og endte ud i, at han opgav teorien fuldstændigt - dette ledte dog andre filosoffer, såvel som matematikere, til at videreudvikle hans idéer. Vi vil her vise, hvordan hans teori så ud, og hvad der fik hele fundamentet til at smuldre.

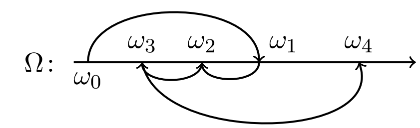
Først og fremmest skal vi lige have et par småting på plads for at kunne forstå definitionerne. Et *begreb* er ment som en grundlæggende tanke omkring *beskrivelsen* af objekter - f.eks. er "at være rød" et begreb, da dette kan bruges til at beskrive røde objekter. Derudover siger vi, at et objekt *falder ind under* et begreb, hvis objektet bliver beskrevet af begrebet - med ovenstående eksempel kan vi så sige, at jordbær falder ind under begrebet "at være rød".

[3] Egentlig havde han til mål at dække *al* matematik, men han startede nu engang beskedent ud med tal.

sammensætning af T med sig selv, betegnet ved T^n, ved

$$\begin{cases} T^0 = \mathrm{id}_\Omega, \\ T^n = T \circ T^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

hvor id_Ω er den identiske afbildning på Ω. Ved den af ω frembragte omløbsbane under T for et $\omega \in \Omega$, betegnet ved T_ω, forstås følgen $(T^n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}_+}$.



Figur 1 En omløbsbane under transformationen T.

Lad $(\Omega, \mathfrak{F})$ være et målbart rum og lad $\omega_0 \in \Omega$ være et element i udfaldsrummet. Lad T være en målelig afbildning på Ω ind i Ω og lad T_{ω_0} betegne den af ω_0 frembragte omløbsbane under T. Omløbsbanen under T kan visualiseres som i ovenstående skema. De idéelle egenskaber hørende til en god pseudotilfældig talgenerator til generelle formål er lette at blive enige om. Tilstedeværelsen af uafhængighed og ensartethed er de gældende kriterier for en generators tilstrækkelighed.

Vi vil gerne matematisk afspejle idéen om, at ligefordelingen bevares af generatoren under iterationer, der bærer et pseudotilfældigt tal over i et andet. Det leder os til studiet af målbevarende afbildninger, *ergodeteorien*.

Definition 2 Lad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt. En målelig afbildning, T, på Ω ind i Ω siges at være P-målbevarende, hvis $T(P) = P$.

Sandsynlighedsbaserede metoder

– Et førstehåndsindtryk med pseudotilfældige tal

Daniel Kjær

For nogle uger siden pålagde jeg mig selv den opgave at aflevere to artikler til FAMØS om Monte Carlo-metoden. Af hensyn til bekvemmelighed forbindes disse artikler sekventielt, idet første artikel indeholder en introduktion til metoderne til frembringelsen af stokastiske variable (s.k. *pseudotilfældige tal*), og den anden artikel omhandler den egentlige Monte Carlo-metode.

De problemer, vi i det følgende vil betragte, er forholdsvist enkle, og vores fremstilling af emnet vil kun kræve et indledende kendskab til målteori.

Ved udfærdigelsen af den foreliggende artikel er der på ingen måde gjort et forsøg på at give en fuldstændig fremstilling af emnet.

Pseudotilfældige talgeneratorer

Vi skal nu træde et skridt tilbage og finde en kilde til produktionen af s.k. *pseudotilfældige tal* og konverteringen af disse tal til udfald af ligefordelte stokastiske variable. De fleste algoritmer til frembringelsen af pseudotilfældige tal er på formen

$$\omega_k = \Gamma(\omega_{k-1}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Elementet ω_0 kaldes et *seed* og siges at initialisere følgen af pseudotilfældige, tal og transformationen Γ kaldes en *pseudotilfældig talgenerator*. Det er klart, at det ikke er enhver afbildning, der kan spille rollen som generator.

Definition 1 Lad $(\Omega, \mathfrak{F})$ være et målbart rum og lad T være en målelig afbildning på Ω ind i Ω. Lad $n \in \mathbb{N}$ og definér den n-foldige

Frege definerer så, at tallet 0 *dækker over* et begreb, hvis det, lige meget hvad a er, altid holder, at a ikke falder ind under begrebet. Altså hvis begrebet eksempelvis er "menneske uden hjerne", så for at et objekt kan falde under et sådan begreb, kræver det, at objektet er et menneske og ikke har en hjerne. Men da et sådant objekt ikke eksisterer (håber jeg stærkt på), vil det derfor gælde, at tallet 0 dækker over "menneske uden hjerne". Bemærk, at vi ikke har defineret *hvad* tallet 0 er, men kun hvad dette mystiske objekt dækker over.

Herfra definerer han så rekursivt, at tallet $(n+1)$ dækker over et begreb F, hvis der findes et objekt a, som falder ind under F, og at tallet n dækker over begrebet "falder ind under F, men er ikke identisk[4] med a" - for at forstå dette en smule bedre vil vi forsøge at definere 1. Lad os starte med begrebet F som værende "er eiffeltårnet i Paris". For at 1 kan dække over dette begreb, skal der først og fremmest findes et objekt, som falder ind under det; det overlades som en øvelse til læseren. Dernæst skal tallet 0 dække over begrebet "falder ind under F men er ikke identisk med eiffeltårnet i Paris", som, ved at indsætte begrebet F, bliver til "falder ind under 'er eiffeltårnet i Paris', men er ikke identisk med eiffeltårnet i Paris". Da der ikke findes nogen objekter, som falder ind under dette begreb, dækker 0 per definition over det; altså dækker 1 over F.

For at have en definition af tallene selv og ikke bare hvad de dækker over, definerer han, at n er et tal, hvis og kun hvis at der findes et begreb, som n dækker over. Altså er tallene defineret! Der er blot et lille problem. Disse definitioner lægger op til, at der findes mange *forskellige* former for 0, 1 osv. Da dette bliver

[4] Frege bruger "identisk", som værende at man kan udskifte de to med hinanden uden at ændre sandhedsværdien.

noget bøvl, vælger Frege at definere 0 som tallet, der dækker over begrebet "ikke lig med sig selv" og $(n+1)$ til at være tallet, som dækker over begrebet "lig med n". Tjek at denne definition faktisk *er* et specialtilfælde af den foregående!

Nu kunne man komme til at tro, at vi var færdige. Men alt, hvad vi har gjort, er at definere en hulens masse. Jovist, vi har retfærdiggjort en eksistens af disse objekter, som vi tillader os at kalde for tal. Men for at det virkelig *er* tal, så kræver det, at de opfører sig, som vi forventer, at tal nu engang gør. Men hvordan kan vi overhovedet sige, hvornår at et tal er lig med et andet tal? Hvordan ved vi at 1 er større end 0? Hvad er $1+1$?

Han lagde ud med at besvare identitetsspørgsmålet, ved at tillade *Humes princip* som et logisk aksiom:

Definition 1 (Humes princip) For alle begreber F, G, gælder det, at tallet, der dækker over F, er identisk med tallet, der dækker over G, hvis og kun hvis der er en en-til-en korrespondance imellem objekterne, som falder under F og G.

Dette viste sig dog at skabe komplikationer, for dette princip skabte, hvad der bliver kaldt for *Cæsar-problemet* - som egentlig blot er, at princippet ikke kan svare på, om tallet, dækkende over et begreb F, er identisk med Julius Cæsar. Et fjollet spørgsmål kunne man måske tænke, men humlen ligger i, at princippet ikke kan sammenligne tal, der dækker over et begreb og andre objekter, der ikke nødvendigvis falder indenfor denne kategori. Frege var ikke tilfreds.

Hans løsning var at erstatte Humes princip med noget bedre, som, han besluttede, skulle handle om *udvidelser* af begreber. En udvidelse af et begreb skal ses som et objekt, der "indeholder" alle de objekter, der falder under begrebet. Altså kan man vælge

Da imidlertid $\mu(x) \to 0$ for $x \to \infty$, vil $p\mu(n) - \mu(np) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, og

$$b_p^{-1} = \sqrt{p} \cdot a^{p-1}. \tag{9}$$

For $p = 2$ har vi altså

$$\sqrt{2} \cdot a = b_2^{-1} = 2\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi},$$

hvor vi ved sidste lighedstegn har brugt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (hvilket kan vises uafhængigt af denne sætning, f.eks. ved formlen $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$). Nu har vi, at $a = \sqrt{2\pi}$ og ved (9) at $b_p = p^{\frac{-1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}$, hvorved sætningen er vist. $\square$

Blod på tanden?

Har du fået blod på tanden og vil vide mere om Gammafunktionen, så skal du være velkommen til at læse mit bachelorprojekt (henvendelse på m10jsj@math.ku.dk), der udover resultaterne i denne artikel også indeholder en udvidelse af Gammafunktionen til at tage komplekse værdier, samt en masse saftige resultater om den komplekse Gammafunktion.

Litteratur

[EA] ARTIN, EMIL: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston (1964). (Oversat af M. Butler fra den tyske originaludgave "*Einführung in die Theorie der Gammafunktion*", B. G. Teubner (1931)), `http://www.plouffe.fr/simon/math/Artin%20E.%20The%20Gamma%20Function%20(1931)(23s).pdf`.

Går vi ind i denne formel med (5),[16] får vi

$$\begin{aligned} b_p^{-1} &= p\prod_{i=1}^{p}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot n^{\frac{i}{p}}}{\frac{i}{p}(\frac{i}{p}+1)\cdot\ldots\cdot(\frac{i}{p}+n)}\right) \\ &= p\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{n!\cdot n^{\frac{i}{p}}\cdot p^{n+1}}{i(i+p)\cdot\ldots\cdot(i+np)}\right) \\ &= p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^p\cdot n^{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} i}\cdot p^{np+p}}{(np+p)!}\right) \\ &= p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^p\cdot n^{\frac{p+1}{2}}\cdot p^{np+p}}{(np+p)!}\right). \end{aligned}$$

Den sidste linje ganger vi med

$$1 = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{p}\left(1+\frac{i}{np}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{np+i}{np}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(np+p)!}{(np)!\cdot(np)^p},$$

og får

$$b_p^{-1} = p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^p\cdot n^{\frac{1-p}{2}}\cdot p^{np}}{(np)!}\right).$$

Nogle af faktorerne kan nu omskrives vha. Lemma 6.

$$\begin{aligned} (n!)^p &= (n\cdot a\cdot n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n+\mu(n)})^p = a^p\cdot n^{np+\frac{p}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-np+p\mu(n)}. \\ (np)! &= a\cdot(np)^{np+\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-np+\mu(np)}. \end{aligned}$$

Indsættes disse i udtrykket for b_p^{-1}, fås

$$b_p^{-1} = \sqrt{p}\cdot a^{p-1}\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{p\mu(n)-\mu(np)}.$$

[16] Vi har kun vist, at formel (5) holder på $]0,1]$, men det er let at udvide til $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

at se det som en slags mængde af objekter, uden at det direkte har noget med mængdelære at gøre. Hans formulering af hans erstatning blev kaldt det originale navn “Basic Law V”:

Definition 2 (Basic Law V) For alle begreber F, G, gælder det, at udvidelsen af F er identisk med udvidelsen af G, hvis og kun hvis det for alle objekter a gælder, at a falder under F, hvis og kun hvis a falder under G.

For at dette havde relevans til tal, redefinerede han hans definition af tal, til at et tal dækker over et begreb F, hvis og kun hvis tallet er en udvidelse af begrebet “har en en-til-en korrespondance med begrebet F”. Igen er n et tal, hvis og kun hvis der er et begreb, som n dækker over. Dette er hvad, der senere hen skabte problemer for Frege - men inden vi blot frastøder hans idéer, så kan vi lige se, hvordan han brugte dette til at vise, at der var uendelig mange naturlige tal.

Med identitetsproblemet fikset ville Frege nu finde en logisk måde at repræsentere tallenes orden; han besluttede at benytte følger. Han definerede, at n direkte følger m i følgen af naturlige tal, hvis og kun hvis der er et begreb F og et objekt x faldende under F, så tallet, som dækker over begrebet F, er n, og at tallet, som dækker over begrebet “falder under F men er ikke identisk med x”, er m. Det er en lille mundfuld, men det fanger dog den intuitive fornemmelse af dét at “direkte følge” efter noget andet. Fra dette kunne han så let bevise at $0 \prec 1$[5]. Dermed kunne han definere $n+1$ som værende det tal, som direkte følger n i følgen af naturlige tal, hvilket medfører at $1+1=2$, da tallet 2 dækker over begrebet “lig med 1”.

[5] Altså at $0 < 1$ og intet naturligt tal findes imellem de to.

Hans sidste udfordring var at definere, at der findes uendelig mange naturlige tal. Selvfølgelig havde han ikke induktion til rådighed, da han arbejder nede på det grundlæggende niveau, så han måtte komme på andre idéer. Han formulerede sætningen som

Sætning 3 *Tallet, der dækker over begrebet "tilhører følgen af naturlige tal, sluttende med n", følger n direkte i følgen af naturlige tal.*

Beviset giver han kun en kort skitse af, da det ellers "would take us too far afield". Et af lemmaerne, der skal bruges til beviset, er

Lemma 4 *Hvis a direkte følger d i følgen af naturlige tal, og hvis tallet, der dækker over begrebet "tilhører følgen af naturlige tal sluttende med d", direkte følger d i følgen af naturlige tal, så gælder det, at tallet, som dækker over begrebet "tilhører følgen af naturlige tal sluttende med a", direkte følger a i følgen af naturlige tal.*

Til at bevise dette skal det bl.a. vises, at a er tallet, der dækker over begrebet "tilhører følgen af naturlige tal, men er ikke lig med a", og for at bevise dette skal det vises, at dette begreb har den samme udvidelse som begrebet "tilhører følgen af naturlige tal sluttende med d". Til at vise dette skal det først bevises, at intet *endeligt*[6] objekt kan følge sig selv i følgen af naturlige tal. Ja, det samlede bevis bliver ret langhåret. Efter alt dette kunne han dog definere det første uendelige tal $\aleph_0$[7] som tallet, der dækker over begrebet "er et endeligt tal".

[6] Han definerer *endelige* tal som tal, der tilhører følgen af naturlige tal begyndende med 0.

[7] Han brugte notationen ∞_1, men her er brugt den moderne notation.

Vi undersøger $\mu(x+1) - \mu(x)$:

$$\begin{aligned}
\mu(x+1)-\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n+1) - g(x+n) \\
&= -g(x) + \lim_{m\to\infty} g(m) \\
&= -g(x) + \lim_{m\to\infty} \left(\log\left(1+\tfrac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} - 1\right) \\
&= -g(x) + \lim_{m\to\infty} \left(\log\left(1+\tfrac{1}{m}\right)^{m} + \log\sqrt{1+\tfrac{1}{m}} - 1\right) \\
&= -g(x) + \log(\mathrm{e}) + \log(\sqrt{1}) - 1 = -g(x).
\end{aligned}$$

Ved at indsætte

$$\mathrm{e}^{\mu(x+1)-\mu(x)} = \mathrm{e}^{-g(x)} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\log(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}}} = \frac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}}$$

i (8) får vi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x$$

for alle $x > 0$, hvorved der ved Bohr-Mollerups sætning findes en konstant a, så $\Gamma(x) = af(x)$ for alle $x > 0$. □

Nu er vi klar til at vise Sætning 4.

Bevis. Det vi skal vise er blot, at $a = \sqrt{2\pi}$ i Lemma 6 og $b_p = p^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}$ i Lemma 5. Imidlertid får vi brug for næsten al den teori, vi hidtil har udviklet om Gammafunktionen. Lad $p \in \mathbb{N}$. For at (i) fra Bohr-Mollerups sætning kan være overholdt, må

$$b_p^{-1} = p\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left(\frac{i}{p}\right).$$

Men dette svarer netop til, at $x \mapsto \mathrm{e}^{\mu(x)}$ er logaritmisk konveks.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\Big((x+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{x}) - 1\Big) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\log(1+\tfrac{1}{x}) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2(1+\frac{1}{x})}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2(1+\frac{1}{x})} - \frac{x^2(1+\frac{1}{x}) - (x+\frac{1}{2})(2x(1+\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{x^2})}{x^4(1+\frac{1}{x})^2} \\ &= \frac{-2x^2(1+\frac{1}{x}) + 2x^2(1+\frac{1}{x}) - x + x(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}}{x^4(1+\frac{1}{x})^2} \\ &= \frac{1}{2x^4(1+\frac{1}{x})^2} > 0, \end{aligned}$$

for $x > 0$, så g er konveks.

Nu mangler vi blot at vise, at f opfylder Gammafunktionens funktionalligning. Ved at skrive

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^{x+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x-1}\mathrm{e}^{\mu(x+1)} \\ f(x) &= x^{x+\frac{1}{2}}x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mu(x)}, \end{aligned}$$

ser vi, at

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\frac{x}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mu(x+1)-\mu(x)}. \tag{8}$$

Frege kom igennem hele det ovenstående bevis og fik bevist, at der er uendeligt mange tal og vigtigere, at tallene kunne defineres logisk (han mente også, at Basic Law V var selvindlysende logisk). Ni år senere, i år 1902, fik Frege et brev fra Bertrand Russell. I dét fremlagde Russell et paradoks, som han lige havde opdaget - et paradoks, som nu kaldes Russells paradoks:

> Lad R være begrebet, der dækker over et objekt x, hvis og kun hvis der er et begreb F, sådan at x er udvidelsen af F, og at x ikke falder under F. Lad nu r være udvidelsen af R og antag at r falder under R. Da findes der et begreb F, så r er udvidelsen af F, og r ikke falder under F. Jf. Basic Law V falder r heller ikke under R, modstrid. Altså må r ikke falde under R. Dermed findes der et begreb F (nemlig R), så r er udvidelsen af F, og r ikke falder under F. Men per definition af R betyder dette, at r falder under R, modstrid.

Dermed er Basic Law V inkonsistent. Frege sendte et høfligt brev tilbage til Russell, hvori han nævnte, at Russells opdagelse var ekstraordinær, og vil betyde en masse fremskridt indenfor logikken, men at det desværre også gjorde, at hele Freges arbejde gik til grunde. Efter dette forsøgte Frege at redde, hvad han kunne, men han endte med at opgive hele projektet. Russell tog dog faklen op og konstruerede hans egen teori fra bunden, kaldet typeteori, hvor han undgik disse problemer. Der forskes stadig i typeteori den dag i dag som et fundament for al matematik. Hans teori bruger dog aksiomer, som ikke kan retfærdiggøres ud fra logik alene, så Freges forsøg på at opbygge al matematik ud fra logik er i stedet blevet genoptaget af nylogicismen, som går tilbage og begynder fra Humes princip igen. Disse "nylogicister" findes stadig i dag - så hele ånden i at logikken må ligge som et grundfundament lever stadig.

Litteratur

[1] Frege, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, 1884. Oversat af Michael S. Mahoney.

[2] Shapiro, Stewart. *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics*. Oxford University Press, 2000.

Bevis. Af hensyn til artiklens omfang udelader vi beviset for, at rækken for μ konvergerer, og at $\mu(x) \to 0$ for $x \to \infty$. (For et bevis se [EA, s. 21-22].

Vi bærer os ad som i beviset for Lemma 5. Lad først funktionen f være giveet ved $f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}$ for $x > 0$. Først viser vi den logaritmiske konveksitet på $]0, \infty[$. Hvis vi kan vise, at $x \mapsto x^{x-\frac{1}{2}}$, $x \mapsto e^{-x}$ og $x \mapsto e^{\mu(x)}$ hver især er logaritmisk konvekse, så vil deres produkt, f, også være det. En funktion er konveks, hvis og kun hvis dens andenafledede er ikke-negativ.

$x \mapsto x^{x-\frac{1}{2}}$ er logaritmisk konveks, da

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\log(x^{x-\frac{1}{2}}) &= \frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x)\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\log(x) + \frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0\end{aligned}$$

for $x > 0$.

Ligeledes er $x \mapsto e^{-x}$ logaritmisk konveks, da

$$\frac{d^2}{dx^2}(\log(e^{-x})) = \frac{d^2}{dx^2}(-x) = 0,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og dermed specielt for $x > 0$.

Hvis vi kan vise, at $x \mapsto g(x)$ er konveks, så vil $x \mapsto \mu(x)$ være konveks (da konveksitet bevares ved summer og grænseværdier).

Lemma 5 *For hvert $p \in \mathbb{N}$ findes en konstant $b_p \in \mathbb{R}$ så*

$$\Gamma(x) = b_p \cdot p^x \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\tfrac{x+i}{p})$$

for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Bevis. Lad $p \in \mathbb{N}$ og lad $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$ betegne funktionen med forskriften

$$f(x) = p^x \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\tfrac{x+i}{p}).$$

Vi viser, at f opfylder (ii) og (iii) fra Bohr-Mollerups sætning. Derved adskiller f sig fra Γ med en multiplikativ konstant, og lemmaet er vist.

Vi ser, at $x \mapsto p^x$ er logaritmisk konveks for $x > 0$, da $\log p^x = x \log p$ er affin. Da Γ er logaritmisk konveks på $]0, \infty[$, er $x \mapsto \Gamma(\frac{x+i}{p})$ det også for $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Produktet af logaritmisk konvekse funktioner er igen logaritmisk konveks, og dermed opfylder f kriterium (iii) fra Bohr-Mollerups sætning. f opfylder også funktionalligningen, da

$$\begin{aligned} f(x+1) &= p^{x+1}\Gamma(\tfrac{x+1}{p}) \cdot \Gamma(\tfrac{x+2}{p}) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}) \cdot \Gamma(\tfrac{x+p}{p}) \\ &= p \cdot p^x \Gamma(\tfrac{x+1}{p}) \cdot \Gamma(\tfrac{x+2}{p}) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}) \cdot \tfrac{x}{p}\Gamma(\tfrac{x}{p}) \\ &= x f(x) \end{aligned}$$

for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. □

Lemma 6 *Der findes et $a \in \mathbb{R}$ så*

$$\Gamma(x) = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x+\mu(x)}, \quad x > 0,$$

hvor μ er som i (6).

Et års udveksling til Singapore

Jonathan Mills

Jeg var på udveksling hos National University of Singapore (NUS) fra august 2012 til maj 2013. Det var en rigtig fin oplevelse, både fagligt, kulturelt og oplevelsesmæssigt. Denne artikel er en lettere omskrevet og stærkt forkortet version af den obligatoriske erfaringsrapport, som er blevet indsendt til KU og på et tidspunkt vil kunne findes på `http://international.ku.dk/`. Ihåndeværende artikel skriver lidt om campus, de fag, jeg endte med at tage, og bureaukratiet på universitetet. For beskrivelser af nogle af de rejser i Asien, jeg foretog mig i ferierne, kan henvises til `http://jpamills.wordpress.com/`.

Universitetet: faciliteter, bolig og mad

NUS' hovedcampus ligger en halv time vest for centrum af Singapore og består af bygninger af varierende alder fra 1970'erne og op til i dag. Campus er meget stort. Det tager cirka 20 minutter at gå fra ende til anden på hvert led i raskt tempo. På hovedcampus finder man alle fakulteter, bortset fra Law og Postgraduate Medicine. Der findes desuden også latterligt mange faciliteter til fri afbenyttelse såsom to udendørs svømmehaller, flere fitnesscentre, biblioteker, computerlokaler, badmintonbaner og en løbebane. Desuden er der også adskillige restauranter, food courts, cafeer, en sundhedsklinik med tandlæge, et (dyrt) supermarked, døgnkiosker, dansesale og en bank. Der gik nogen gange flere uger, uden at jeg forlod campus, da næsten alt netop kan fås på campus.

Lokalerne til undervisning er generelt acceptable. Auditorierne er i varierende stil, men fælles for dem alle er, at de er airconditioneret til "HCØ om vinteren" temperatur, så tro ikke, at man kan slippe helt væk fra kulden ved at tage til Singapore. I visse auditorier er rækkerne også meget tæt på hinanden, så det bliver lidt trængt med knæ- og benpladsen, og i nogle af auditorierne kan man undre sig, om der nogensinde er blevet støvsuget. Men langt de fleste af de over 30 auditorier på campus er i fuldstændig acceptabel stand med godt lysniveau eller stor klar projektorskærm (begge opnås sjældent samtidig), lydsystem (da auditorierne er store), ren luft og gode stole med fold-ud bord i armlænet stort nok til at stille en bærbar på.

Øvelseslokalerne er også at finde i mange forskellige udgaver. Igen her bliver stolene nogen gange stillet lidt tæt, især på FASS (Faculty of Arts and Social Sciences), men også her gælder, at lokalerne normalt er helt acceptable. Især øvelseslokalerne i matematikbygningen (S17) er gode, med bløde kontorstole og store borde. Til matematikbygningen kan desuden nævnes, at der er en lounge på fjerde sal med bløde sofaer, dagens avis, whiteboard og en stor samling matematiske journaler og bøger. Her tilbragte jeg meget af min tid mellem timer.

Campus er røgfrit og alkoholfrit, og det tages rimelig seriøst, hvis man bliver fanget i at drikke på kollegieværelserne. Dog skal det siges, at så længe man er på god fod med sine naboer og sørger for kun at "varme op" på værelserne, for derefter at tage videre i byen, så kan man godt slippe afsted med det.[8]

Jeg boede på et kollegie i det nybyggede University Town (i

[8] Generelt om hele Singapore kan siges, at love og regler er meget strikse, men de anvendes utrolig arbitrært. Det er for eksempel ulovligt at udøve homoseksualitet, men der er ikke nogen, der er blevet straffet for det i mange år. Loven er der dog sådan, at den kan anvendes, hvis der skulle blive brug for det. Man kan godt nogle gange se i medierne, at der bliver drevet klapjagt på visse personer.

Da Γ også opfylder (i)-(iii), må der ligeledes gælde

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{5}$$

for $x \in]0,1]$, hvorved sætningen er vist. □

Stirlings Formel og Gauss' Multiplikationsformel

Bohr-Mollerups sætning gør det let at vise identiteter om Gammafunktionen. Vi vil her illustrere dette, ved at vise to store resultater om Gammafunktionen ved hjælp af den.

Sætning 4 (Stirlings Formel) *For $x > 0$ er*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x+\mu(x)}, \tag{6}$$

hvor $\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ og $g(x) = (x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x}) - 1$.

(Gauss' Multiplikationsformel) *For hvert $p \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ er*

$$\Gamma(x) = p^{x-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} \Gamma(\tfrac{x}{p})\Gamma(\tfrac{x+1}{p}) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}). \tag{7}$$

Stirlings formel er en måde at approksimere Gammafunktionen på ved hjælp af simplere funktioner. $\mu(x) \to 0$ for $x \to \infty$, så fejlen ved at se bort fra μ bliver mindre og mindre, des større x bliver.

Gauss' Multiplikationsformel er en æstetisk sammenhæng mellem $\Gamma(x)$ og $\prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\frac{x+i}{p})$, der holder for alle naturlige tal p.

Vi viser de to formler ved først at vise to lemmaer, der giver os formlerne på nær nogle multiplikative konstanter. Dernæst fastslår vi konstanterne.

Ved brug af (4) fås nu

$$\log(n-1) \;\leq\; \frac{\log(f(x+n)) - \log((n-1)!)}{x} \;\leq\; \log(n)$$

Det vil sige

$$\log((n-1)^x(n-1)!) \;\leq\; \log(f(x+n)) \;\leq\; \log(n^x(n-1)!)$$

Ved at tage eksponentialfunktionen på denne ulighed og herefter benytte (3), fås

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \;\leq\; f(x) \;\leq\; \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Da n ikke længere indgår i den midterste term, kan vi opfatte ovenstående som to separate uligheder, der begge holder for $n \geq 2$. Altså må vi godt operere med forskellige værdier af n til venstre og højre henholdsvist, og specielt kan vi gå ind i venstresiden med $n+1$, hvilket giver

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \;\leq\; f(x) \;\leq\; \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

En simpel manipulation med disse uligheder giver

$$f(x)\frac{n}{x+n} \;\leq\; \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \;\leq\; f(x),$$

og tager vi grænseværdien for $n \to \infty$, får vi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

for alle $x \in]0,1]$.

daglig tale, UTown). UTown er en helt ny del af campus, som ligger på den anden side af en motorvej. Man kan gå over til resten af campus via en bro eller vente på bussen. UTown er fantastisk flot arkitektur og består af i alt 6 højhuse til kollegiebrug, en håndfuld restauranter (der faktisk serverer alkohol om aftenen - her kan man godt få snakken til at gå med venner indtil langt ud på aftenen hen over en øl), to food courts, to store computerlokaler med PC- og Maccomputere, masser af studiepladser, svømmehal, døgnåbent Starbucks og diverse butikker inklusive supermarked. Da jeg var der, var der desuden også dagligt meget byggelarm fra en udvidelse af UTown, der er i gang, som skal huse Yale-NUS, et samarbejde mellem de to universiteter.

Mit værelse var på omkring 3,5 gange 2 meter, og jeg betalte 100 singaporeanske dollars (SGD) om ugen for det, hvilket svarer til cirka 500 kr. Der findes både værelser med og uden aircondition, og værelser på gangen og i en suite. Aircondition er forbrugsafregnet, og hvis man ikke vælger aircondition, så har man stadig en blæser i loftet, som er kraftig nok kombineret med et åbent vindue til, at det føles behageligt. Vælger man et værelse i en suite, får man badeværelse og stue til deling med de fem andre. Boligen blev anvist af universitetet efter at have takket ja til at ville bo på campus under ansøgningsprocessen. Kollegiet i sig selv er en bygning på 20 etager, og på hver etage er der omkring 30 værelser, toiletter og en lounge med sofaer. På hver fjerde etage er der desuden køkken (som ikke på nogen måde kan måle sig med et dansk kollegiekøkken. Tænk snarere 30 kvm-lejlighedsstil), og der findes også vaskerum to steder i bygningen. På stueetagen er der postkasser, bygningsadministrationens kontor, en stor lounge med borde og og et klaver til fri afbenyttelse.

De fire kollegier i UTown (hermed undtaget UTown Residence, tidligere Graduate Residence) er underlagt en obligatorisk madplan på \$8 SGD om dagen. For dette får man morgenmad og aftensmad i spisesalen, som ligger i forbindelse med kollegiet. Til morgenmad kan man vælge mellem tre forskellige boder, hhv. kinesisk, vestlig og malaysisk morgenmad. Til aftensmad desuden indisk og nudler. Maden smager generelt helt fint, selvom man kan få mere værdi for pengene i et hvilket som helst Hawker Centre i Singapore. Frokost klares på egen hånd, hvor de food court, der kan findes rundt omkring på campus, sagtens kan levere frokost til mellem to og fem SGD per portion.

Fagligt

Generelt er niveauet højt - hvis man finder det rigtige niveau! Dette skal forstås således, at finder man et kursus på det rette startniveau, så kan man nå rigtig langt i løbet af semestret. Men det, at finde et kursus på det rette niveau, kan godt være noget af en opgave, som oftest vil kræve, at man har en liste på omkring 8-10 interessante kurser linet op, hvor man så tager til første forelæsning i dem alle. For eksempel kan nævnes, at jeg som tredjeårs Matematik-Økonomi studerende tog både level 3000 og level 4000 kurser, hvor mange af de level 3000 kurser, jeg kiggede på i starten, simpelthen var for nemme. Jeg endte med at tage følgende fag i løbet af mine to semestre:

- EC3101 Microeconomic Analysis II

  Generelt udmærket kursus. Professoren (Peter McGee) var amerikaner. Emner som i kursusbeskrivelsen, dog er den spilteoretiske del ikke meget at skrive hjem om i forhold til MA4264. Folk til forelæsningerne var generelt meget støjende af en eller anden årsag, måske fordi mange af de lokale var andetårs-studerende, som snakkede med deres sidemand, enten fordi de ikke gad lytte, eller fordi de ikke forstod, det

Bevis. Vi har allerede set, at $\Gamma(1) = 1$ og at $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ er opfyldt. At vise, at Gammafunktionen er logaritmisk konveks, kræver lidt mere arbejde. Et vigtigt (og ikke trivielt) resultat om logaritmisk konvekse funktioner er, at summen af to logaritmisk konvekse funktioner igen er logaritmisk konveks. (Dette kan vises ved Hölders ulighed). Et andet vigtigt resultat er, at den punktvise grænse af en følge af logaritmisk konvekse funktioner igen er logaritmisk konveks. Kombinationen af disse resultater giver, at integralet af en logaritmisk konveks funktion igen er logaritmisk konveks. Vi skal altså blot vise, at $x \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ er logaritmisk konveks for hvert $t > 0$.

Lad $t > 0$ være givet. Nu vil $\log(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}) = (x-1)\log(t) - t$ være affin og dermed konveks (kordehældningen vil være konstant og dermed svagt voksende som funktion af venstre såvel som højre endepunkt).

Antag nu, at f opfylder (i)-(iii). Ved (ii) ser vi, at

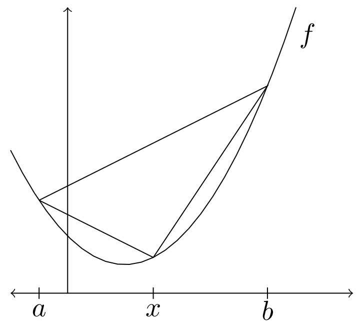
$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdot\ldots\cdot x\cdot f(x) \tag{3}$$

for alle $x \in]0,\infty[$, $n \in \mathbb{N}$, og ved at bruge (i), gælder

$$f(n) = (n-1)! \tag{4}$$

Dermed stemmer f overens med Γ på $\mathbb{N}$. Hvis vi kan vise, at de også stemmer overens på $]0,1]$, så følger det af (ii), at de stemmer overens på hele $A \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Lad derfor $x \in]0,1]$ være givet. Ved at bruge (iii) har vi følgende ulighed for $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}[\frac{\log f(n) - \log f(n-1)}{n-(n-1)} &\leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \\ &\leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1)-n}\end{aligned}$$



Figur 1 En konveks funktion

I 1922 opdagede de danske matematikere Johannes Mollerup og Harald Bohr[15], at disse tre kriterier var nok til at karakterisere Gammafunktionen entydigt.

Sætning 3 (Bohr-Mollerups sætning) *Gammafunktionen opfylder, at* $\Gamma(1) = 1$, *at* $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ *for alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, *og at* $\Gamma|_{]0,\infty[}$ *er logaritmisk konveks.*

Hvis $f : A \to \mathbb{R}$, *hvor* $]0,\infty[\subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ *opfylder*

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f(x+1) = xf(x)$ *for alle* $x \in A$,

(iii) $f|_{]0,\infty[}$ *er logaritmisk konveks,*

så er

$$f(x) = \Gamma(x)$$

for alle $x \in A \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

[15] Udover at være matematiker var han en glimrende fodboldspiller, der vandt OL-sølv med det danske landshold i 1908. Han var professor her ved instituttet, og du har måske prøvet at sidde i hans sofagruppe, der var udstillet i frokoststuen på fjerde sal i foråret.

der blev snakket om, som professoren også kommenterede på.

- EC3102 Macroeconomic Analysis II

  Indholdsmæssigt fint kursus. Ho Kong Weng, professoren, var indfødt singaporeaner med autentisk Singlish accent, som skal høres for at opleves. Forelæsningerne lå klokken 8 mandag morgen, men heldigvis blev de optaget og lagt ud på kursushjemmesiden, hvis man nu konsekvent kom til at sove over sig.
- EC3880A Topics in Economics: Understanding Government

  Dette kursus var nok det mest interessante af alle dem, jeg tog. Forelæseren, Donald Low, har arbejdet i Singapore's finansministerium og gav et overblik over mikroøkonomiens teoretiske mangler og faldgrupper, som de relaterer til statens funktion. Kurset var kun på omkring 30 folk, og jeg måtte også ud i noget papirarbejde for at få det, men det var klart det værd.
- MA3205 Set Theory

  Spændende kursus som generelt omhandlede det aksiomatiske grundlag for matematikken. Dette var igen et lille kursus med omkring 30 folk, og forelæseren Yang Yue brugte god tid på at sørge for, at hele holdet var med. Ingen slides, men udelukkende tavleskrivning, som var det rigtige valg til dette bevistunge fag.
- MA3238 Stochastic Processes

  Lidt rodet kursus, som brugte for meget tid på basal sandsynlighedsregning, inden det nåede til de egentlige stokastiske processer. Forelæseren Rongfeng Sun var noget uklar i sin tale en gang imellem, og det var da også første år, han underviste på kurset. Men indholdet til sidst var spændende.
- MA4254 Discrete Optimization

God teoretisk udbygning af Simplex metoden, koblet på et klassisk redskabskursus. Professoren Defeng Sun havde en god form for humor og var utrolig pragmatisk i sin undervisningsstil. Forelæsningerne lå dog klokken 19-22 om aftenen, og han stoppede aldrig før tid.

- MA4257 Financial Mathematics II

  Dette er et udfordrende kursus, som efter min mening meget hurtigt bliver kedeligt, hvis man ikke ved med sikkerhed, at man skal leve af prisfastsættelse af optioner resten af sit liv. Professoren Dai Min gad sjældent at få mikrofonen til at virke og brugte ikke meget tid på at gennemgå tingene grundigt. Forelæsningerne lå desuden også klokken 19-22 om aftenen.
- MA4264 Game Theory

  Rigtig fint kursus, hvor der er meget at dykke ned i. Professoren Zhao Gongyun har før undervist i Kina og Tyskland og havde en god undervisningsstil. Forelæsninger dog også 19-22 om aftenen.
- ST4245 Statistical Methods for Finance

  Udfordrende kursus med interessante anvendelsesmuligheder. Faget handlede om statistiske metoder, hvor middelværdien og variansen ikke antages konstant, men tillades at variere henover tid. Disse metoder er meget anvendelige på aktiepriser etc. Forelæseren Lim Tiong Wee var altid velforberedt og yderst sikker i sin fremtræden. Faget var desuden også meget projektbaseret, hvilken hjalp på forståelsen af stoffet.

Fagligt skal desuden også noteres, at karakteren for et fag ofte er sammensat af forskellige elementer. En typisk opdeling er at 50-70% af karakteren kommer fra den endelige, ofte to timer uden

I resten af denne artikel vil vi vise nogle af disse spændende resultater. Vi vil starte med et entydighedsresultat om Gammafunktionen.

Entydig karakterisering på $]0,\infty[$

Det er klart, at der findes uendeligt mange funktioner, der opfylder funktionalligningen $f(x+1) = xf(x)$. Har man én kan man gange den med en vilkårlig periodisk funktion med periode 1, og man vil få en ny. Hvis man yderligere kræver, at funktionen skal antage værdien 1 i 1, er der stadig uendeligt mange (hvis f opfylder funktionalligningen, så vil $\frac{f(x)}{f(1)}$ også opfylde funktionalligningen og yderligere tage værdien 1 i 1). Disse to kriterier er derfor ikke nok til at karakterisere Gammafunktionen entydigt. Imidlertid er der et tredje kriterium, der sorterer Gammafunktionen ud fra de uendeligt mange andre funkioner, og det er kriteriet om *logaritmisk konveksitet*.

Definition 2 En funktion, f, siges at være konveks, hvis der for $a < x < b$ gælder

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

En strengt positiv funktion, f, siges at være logaritmisk konveks, hvis $\log f$ er konveks.

Med ord vil det sige, at en funktion er konveks, hvis hældningen af korden mellem to punkter på grafen vokser, når højre såvel som venstre endepunkt vokser.

Ved at bruge partiel integration ser man, at Gammafunktionen opfylder funktionalligningen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1}$$

Ved at bruge denne funktionalligning gentagne gange ser man, at for $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$ er

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \cdot \ldots \cdot (x+1)x\Gamma(x). \tag{2}$$

Ved at sætte $x = 1$ i Definition 1 ser man, at $\Gamma(1) = 1$, og ved at sætte $x = 1$ i (2) fås nu

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

der viser, at Gammafunktionen rent faktisk interpolerer fakultetsfunktionen. (Dog med forskudt argument).

Fra (2) får vi, at

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)}, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Højresiden er veldefineret for $x > -n$, når blot $x \notin \{0, -1, -2, \ldots, -n+1\}$. Dermed kan vi udvide definitionsmængden for Gammafunktionen fra $]0, \infty[$ til $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Mere end blot interpolation

Skønt Gammafunktionen blev opfundet som løsning til et interpolationsproblem, stod det hurtigt klart, at funktionen var interessant i sig selv. Den spiller en vigtig rolle i sandsynlighedsregning og teoretisk fysik, og den indgår i et væld af identiteter, bl.a. en spejlingsformel, der binder den sammen med de trigonometriske funktioner.

hjælpemidler, skriftlige eksamen. Resten kommer så fra løbende evaluering, såsom gruppearbejde, midterms eller opgaver. Den endelige karakter bliver desuden også modereret efter en normalfordeling, så ens endelige karakter afhænger tildels af hvor godt eller dårligt, det går ens medsturerende. Dette er ikke positivt over for den generelle lyst til at samarbejde om læsningen, da det nogen gange bliver mere en konkurrence om at lære mest end et samlet intellektuelt projekt.

Bureaukrati: finter og tips til overlevelse

Singapore elsker regler, og NUS ligeså. Nogle regler er ikke nedskrevne, andre regler er nedskrevne, men ikke håndhævede. En af de mest mærkelige er, at som udvekslingsstuderende må du ikke tage mere end 5 fag. Eller, du må godt, men hvis du gør, får du en e-mail fra universitetet, om at du skal melde dig fra fag, indtil du er nede på fem.

Så er der også hele ansøgningsproceduren til NUS og formaliteterne, som skal overstås efter ankomst. Der er ikke meget, man kan gøre her, for at det skal blive sjovere, men man kan dog gøre sig selv den tjeneste at læse alt, hvad man modtager, og agere i god tid. Alt foregår efter kø, så man kan ligeså godt komme forrest ved en ekstra indsats eller korrekt fremmøde for at spare tid og besvær i den anden ende.

Kursustilmeldingen for udvekslingsstuderende er forvirrende, især hvis man ikke får de kurser, man søgte ved ansøgningstidspunkt. Så skal man ud i nogle runder, hvor man byder på kurser. Hvis det stadig ikke lykkedes efter to runder med at byde på kurser, kan man bruge en CAP form, som kan downloades fra NUS' hjemmeside. Dette stykke papir er virkelig det bedste redskab, du har, til at skære igennem bureaukratiet. Man skriver de fag, man vil have, og så henvender man sig hos det institut, hvor faget udbydes. Her skal man så som oftest have professorens underskrift på, at det er ok at tage faget, og så tager man papiret til centraladministrationen. Dette stykke papir fik jeg brug for begge semestre for at få fag, som jeg ellers havde brugt tre uger på at prøve at få.

Konklusion

Konklusionen på mit udvekslingsophold må være, at jeg er meget glad for, at jeg tog afsted, og rigtig glad for at jeg valgte to semestre. Selv med overnormering i andet semester med fire fag på NUS og bachelorprojekt samtidig i KU-regi (en samlet nominel belastning på 60 timer om ugen), som skyldtes, at jeg ikke bestod et af fagene i første semester, var jeg rigtig glad for oplevelsen og vil da også mene, at jeg har lært meget, både inden for områder, hvor KU måske ikke har helt det samme kursus og også alle de små ting, der bidrager til en gammeldags dannelse og moderne forståelse og respekt for forskelligheder.

How-To: udveksling som studerende på IMF

Inden du, kære læser, begynder at planlægge dit eget udvekslingsophold, så hold øje med de vigtige deadlines, og orienter dig blandt andet i erfaringsrapporterne fra tidligere udrejste studerende. Alle detaljer om dette findes på den førnævnte `http://international.ku.dk/`. Bemærk specielt, at hvis man påtænker at rejse ud i året 2014-2015 uden for Europa, så skal en ansøgning allerede afleveres den 25. september 2013. Inden dette skal man have fundet ud af, hvilket universitet man vil tage til og så få lagt en motiveret studieplan. Dette kan være lidt af en udfor-

Gammafunktionen
– En introduktion

Jacob Stevne Jørgensen

I 1700-tallet var interpolation en vigtig disciplin blandt matematikere. Det handler om ud fra et givet datasæt at finde en funktion, hvis graf gennemløber datasættet.

Det var allerede velkendt, at funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ for den sags skyld) givet ved $f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ giver summen af de x første naturlige tal (det x'te trekanttal) for $x\in\mathbb{N}$. f interpolerer således trekanttallene.

Det var derfor naturligt for datidens matematikere at spørge sig selv: "Er det også muligt at finde en funktion, der interpolerer fakultetsfunktionen?" Altså en funktion, der giver $x!$ for $x\in\mathbb{N}$, men også er defineret for andre x-værdier.[14]

Gammafunktionen blev opfundet som en løsning til dette interpolationsproblem.

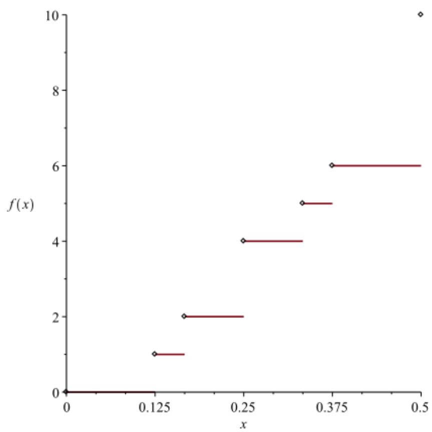
Definition 1 Der skal med Gammafunktionen forstås funktionen $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Man kan let vise, at dette integral er endeligt for positive x-værdier (se f.eks. [EA, s. 11-12]).

[14] Med vores nutidige funktionsbegreb er det klart, at der findes uendeligt mange funktioner, der interpolerer fakultetsfunktionen. Ved blot at indtegne punkterne $(0,1),(1,1),(2,2),(3,6),(4,24),\dots,(n,n!),\dots$ og forbinde dem på en vilkårlig måde har man konstrueret en (kontinuert!) løsning til problemet. I 1700-tallet var funktionsbegrebet imidlertid ikke så veludviklet. En funktion var snarere lig en formel eller et eksplicit udtryk.

Figur 1 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ på intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$



dring i de matematiske fag, da det er noget af en opgave at sætte sig ind i en fagbeskrivelse til noget, der er relevant om et år, når man endnu måske ikke har haft forudsætningskurserne. Her er mit råd at lave en liste over interessante og relevante fag fra det fremmede universitets fagkatalog, og så få respons fra vores alles studieleder Ernst Hansen. Jeg er i hvert fald meget taknemmelig for den hjælp, jeg fik fra ham. Så er det også nødvendigt inden afrejse at få forhåndsgodkendelse på de fag, man overvejer at læse, hvilket Green Lighthouse kan være behjælpelige med. Bemærk, at hverken studieplan eller forhåndsgodkendelse er bindende, men husk, at man stadig skal, ifølge reglerne for udrejse, kunne opnå fuld merit for ens udvekslingsophold, så sigt efter fag, der kan meritoverføres. SU kan man også få med, men husk også at få en ansøgning indsendt til KUs SU kontor.

Efter hjemrejse skal man så både afrapportere, få meritoverførsel og dokumentere over for SU kontoret, at man har været studieaktiv. Denne proces er jeg selv endnu ikke færdig med, da jeg afventer et karakterbevis fra NUS.

Sjov med pizza
– og vandmeloner

Jingyu She

Blokkens præmieopgave (23. årgang nr. 1)

Lad N være et naturligt tal. En pizzakniv trækkes igennem en pizza N gange.[9] Hvad er det maksimale antal stykker, pizzaen kan skæres op i?

Blandt de korrekt besvarelser med dertil følgende bevis udtrækkes en vinder. Præmien lyder på et gavekort på 100 kr til GAMES eller en autentisk GBP[10] efter vinderens frie valg.

Blokkens ekstraopgave (23. årgang nr. 1)

Lad N være et naturligt tal. Et samuraisværd trækkes igennem en vandmelon N gange.[11] Hvad er det maksimale antal stykker, vandmelonen kan skæres op i?[12]

Svar bedes indsendt til `famos@math.ku.dk` senest 15. oktober.

[9] Her bemærkes, at pizzakniven selvfølgelig skal trækkes lige igennem pizzaen.
[10] Ginger Beer Plant.
[11] Her tænker vi Fruit Ninja: Det går så hurtigt, at vandmelonen ikke når at falde fra hinanden.
[12] Bemærk, at besvarelse af denne opgave ikke udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne offentliggjort i næste FAMØS-blad i den rækkefølge, vi modtager jeres svar! Enhver af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden følgende opgaver, kan vælge at få trykt sit ansigt på forsiden af FAMØS.

nedenstående beskrivelse af f på intervallet $\left[0,\frac{1}{2}\right]$:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{1}{8},\\ 1 & \frac{1}{8}\le x<\frac{1}{6},\\ 2 & \frac{1}{6}\le x<\frac{1}{4},\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}4 & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{3},\\ 5 & \frac{1}{3}\le x<\frac{3}{8},\\ 6 & \frac{3}{8}\le x<\frac{1}{2},\\ 10 & x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Grafen for f på $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ er desuden illustreret i figur 1.

Vi kan nu konkludere, at et heltal a ligger i billedet af f, hvis og kun hvis a kan skrives som $0,1,2,4,5$ eller 6 plus et multiplum af 10, hvis a er et ikke-negativt heltal, betyder det netop, at sidste ciffer i a er en af de seks muligheder. Tilbage er blot at konstatere, at fra 1 til 100 er der $10\cdot 6=60$ tal, hvor sidste ciffer er enten $0,1,2,4,5$ eller 6, så svaret på opgaven er 60.

Svar indsendt af Sune Precht Reeh (fra forsiden):

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være funktionen givet i opgaven ved

$$f(x) := \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor.$$

En hurtig udregning viser, at funktionen opfylder

$$\begin{aligned} f(x + \tfrac{1}{2}) &= \lfloor 2x+1 \rfloor + \lfloor 4x+2 \rfloor + \lfloor 6x+3 \rfloor + \lfloor 8x+4 \rfloor \\ &= \lfloor 2x \rfloor + 1 + \lfloor 4x \rfloor + 2 + \lfloor 6x \rfloor + 3 + \lfloor 8x \rfloor + 4 \\ &= f(x) + 10. \end{aligned}$$

Hvis $a \in \mathbb{Z}$ ligger i billedet af f, vil der derfor gælde, at $a + 10k$ ligger i billedet af f for alle $k \in \mathbb{Z}$; for hvis vi har $a = f(x)$, så er $a + 10k = f(x + \frac{k}{2})$. Når vi skal bestemme billedet af f, er det derfor tilstrækkeligt at undersøge hvilke af tallene 0 til 9, der optræder i billedet af f. Funktionen f er en sum af svagt voksende funktioner, så f er svagt voksende. Desuden er $f(0) = 0$ og $f(\frac{1}{2}) = f(0) + 10 = 10$, så tallene 1 til 9 kan kun optræde i billedet af f på intervallet $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

For $n \in \mathbb{N}$ er funktionen $x \mapsto \lfloor nx \rfloor$ konstant på ethvert interval $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, hvor k er et heltal. Mindste fælles multiplum af $2, 4, 6$ og 8 er 24, og f er derfor konstant på intervallerne $\left[\frac{k}{24}, \frac{k+1}{24}\right[$ for $k \in \mathbb{Z}$. For at bestemme f på intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ behøver vi kun at udregne værdierne $f(\frac{k}{24})$ for $k = 0, 1, \ldots, 24$, hvorved vi får

Tilbagemelding fra sidst (22. årgang nr. 3)

Stort tillykke til Asbjørn (mat '12) for at have svaret korrekt på begge dele af præmieopgaven! Vi sender et lidt forsinket gavekort til GAMES på 120 kroner til dig snarest muligt. Også ekstraopgaven blev der svaret flittigt på, først af Sune (mat '05) og derefter af Thor (mat '11). Begge besvarelser var korrekte. Idet det er lykkedes for Sune at besvare ekstraopgaven korrekt fire gange i træk, pryder hans ansigt nu forsiden af FAMØS. Det skal nævnes, at der ikke går længe, før Thor også har mulighed for at prøve dette. Mange tak til alle, der deltog i denne omgang. Løsninger kan blandt andet findes i en særskilt artikel i dette blad.

Her nytter 'solve' ikke!
– Svar på opgaver fra FAMØS 22.3

Asbjørn Nordentoft og Sune Precht Reeh

Løsning af præmieopgaven

a) Find samtlige $(x,y) \in \mathbb{R}$, der opfylder $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.
b) Vælg $x, y > 0$ vilkårligt og lad $s = \min(x, y, \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$. Find den størst mulige værdi af s.

Svar indsendt af Asbjørn Nordentoft (mat '12):
a) Hvis vi antager, at $x = 0$, bliver ligningen til:

$$y^3 = y^2 \Leftrightarrow y^2(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \vee y = 1)$$

Antag nu, at $x \neq 0$. Vi kan nu dividere igennem med x^2, og dermed får vi:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Leftrightarrow x + \left(\frac{y}{x}\right)^3 \cdot x = 1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)$$

Sæt nu $a = \frac{y}{x}$, så omskrives ligningen til $x + a^3 \cdot x = 1 + a^2$. Hvis $a = -1$ får vi:

$$x + (-1)^3 \cdot x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0 = 2,$$

hvilket åbenlyst er en modstrid. Dette betyder, at $a \neq -1$ og dermed $a^3 + 1 \neq 0$. Vi kan derfor omskrive udtrykket:

$$x \cdot (1 + a^3) = 1 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 + a^2}{1 + a^3}.$$

Dette giver os

$$y = \frac{y}{x} \cdot x = a \cdot \frac{1 + a^2}{1 + a^3} = \frac{a + a^3}{1 + a^3}$$

Alt i alt er samtlige løsninger (x,y) givet ved:

$$(0,0), \quad (0,1) \quad \text{og} \quad \left(\frac{1 + a^2}{1 + a^3}, \frac{a + a^3}{1 + a^3}\right), \; a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b) For $x = y = \sqrt{2}$ får vi oplagt:

$$x = y = \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

I dette tilfælde er $s = \sqrt{2}$. Jeg påstår, at disse x og y maksimerer s. Hvis der enten gælder $x < \sqrt{2}$ eller $y < \sqrt{2}$, får vi oplagt, at $s < \sqrt{2}$. Hvis derimod $x, y \geq \sqrt{2}$, får vi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, hvilket giver os:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Dermed får vi også i dette tilfælde $s \leq \sqrt{2}$. Alt i alt er $s \leq \sqrt{2}$ for alle $x, y > 0$, hvor lighed kun gælder, hvis $x = y = \sqrt{2}$. Dermed er $\max_{x,y>0}(s) = \sqrt{2}$.

Løsning ekstraopgaven

Hvor mange af de første 100 naturlige tal ligger i billedmængden af afbildningen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor,$$

hvor $\lfloor \cdot \rfloor$ betegner floor-funktionen?[13]

[13] Wikipedia is your friend.