Banach-Steinhaus' sætning

Rasmus Sylvester Bryder

Vi vil her give et kort og elementært bevis for Banach-Steinhaus' sætning, også kendt under navnet *Uniform boundedness principle*, hvis anvendelighed har nærmest ingen ende i felter som funktionalanalyse og operatoralgebra. Beviset og dets optakt stammer fra [2].

For normerede rum X og Y og en lineær afbildning $T\colon X \to Y$ defineres

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Der gælder da, at T er kontinuert hvis og kun hvis $\|T\| < \infty$, i hvilket fald $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ for alle $x \in X$ (se fx [1, Sætning 4.6 og 4.8]). Mængden $B(X,Y)$ af kontinuerte lineære afbildninger $X \to Y$ er et vektorrum med punktvis addition og skalarmultiplikation, og $T \mapsto \|T\|$ er en norm på $B(X,Y)$.

Lemma 1 *Lad X og Y være normerede rum og lad $T \in B(X,Y)$. Da vil der for alle $x \in X$ og $r > 0$ gælde*

$$\sup\{\|Tx'\| \mid x' \in X,\ \|x' - x\| < r\} \geq \|T\|r.$$

Bevis. Lad M betegne ovenstående supremum. Idet $\|y - y'\| \leq \|y\| + \|y'\|$ for $y, y' \in X$ grundet trekantsuligheden, har vi at

$$\begin{aligned}\max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} &\geq \frac{1}{2}\left(\|T(x+z)\| + \|T(x-z\|\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|Tz - (-Tz)\| = \|Tz\|\end{aligned}$$

for alle $z \in X$. For $z \in X$ med $\|z\| < r$ vil $\|(x+z) - x\| < r$ og $\|(x-z) - x\| < r$, hvormed $\max\{\|T(x+z)\|, \|T(x-z)\|\} \leq M$

og dermed $M \geq \|Tz\|$. Dermed er M et overtal for

$$\{\|Tz\| \mid z \in X,\ \|z\| < r\},$$

hvilket medfører den ønskede ulighed:

$$M \geq \sup\{\|Tz\| \mid z \in X,\ \|z\| \leq r\} = \|T\|r$$

□

Korollar 2 *Lad X og Y være normerede rum og lad $T \in B(X,Y)$. Da vil der for alle $x \in X$ og $r > 0$ findes et $x' \in X$ så $\|x'-x\| \leq r$ og $\|Tx'\| \geq \frac{2}{3}\|T\|r$.*

Bevis. Ovenstående gælder klart hvis $\|T\| = 0$. Hvis $\|T\| \neq 0$, sættes $\varepsilon = \frac{1}{3}\|T\|r$. Jf. ovenstående lemma findes $x' \in X$ med $\|x'-x\| < r$ så $\|Tx'\|+\varepsilon \geq \|T\|r$, hvormed det ønskede følger. □

Sætning 3 (Banach-Steinhaus, 1927) *Lad $\mathfrak{A} \subseteq B(X,Y)$, hvor X er et Banach-rum og Y et normeret rum. Hvis $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|Tx\| < \infty$ for alle $x \in X$, vil $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|T\| < \infty$.*

Bevis. Hvis $\sup_{T\in\mathfrak{A}} \|T\| = \infty$, findes en følge $(T_n)_{n\geq 1}$ i $\mathfrak{A}$ så $\|T_n\| \geq 4^n$ for alle n. Sæt $x_0 = 0$ og benyt Korollar 2 for T_1 og x_0 til at bestemme $x_1 \in X$ med $\|x_1 - x_0\| \leq 3^{-1}$ med $\|T_1x_1\| \geq \frac{2}{3}3^{-1}\|T_1\|$. Ved gentagen brug af Korollar 2 opnås nu en følge $(x_n)_{n\geq 1}$ i X med $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^{-n}$ og $\|T_nx_n\| \geq \frac{2}{3}3^{-n}\|T_n\|$. For

$m > n$ vil

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} 3^{-k} \\ &= 3^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{m-n-1} 3^{-k} \leq \frac{3}{2} 3^{-(n+1)} = \frac{1}{2} 3^{-n},\end{aligned}$$

så $(x_n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy-følge og konvergerer derfor mod et punkt $x \in X$. Ved at lade $m \to \infty$ i ovenstående fås $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{2} 3^{-n}$, hvormed $\|T_n(x_n - x)\| \leq \|T_n\| \|x_n - x\| \leq \frac{1}{2} 3^{-n} \|T_n\|$ og

$$\begin{aligned}\|T_n x\| &\geq \|T_n x_n\| - \|T_n(x_n - x)\| \\ &\geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) 3^{-n} \|T_n\| = \frac{1}{6} 3^{-n} \|T_n\| \\ &\geq \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty,\end{aligned}$$

så $\sup_{T \in \mathfrak{A}} \|Tx\| = \infty$. Dette viser sætningen. $\square$

Litteratur

[1] Berg, Christian, *Metriske rum*, Matematisk afdeling, Københavns Universitet, 1997.

[2] Sokal, Alan D., *A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem*, American Mathematical Monthly, 2010.