

Gammafunktionen

– En introduktion

Jacob Stevne Jørgensen

I 1700-tallet var interpolation en vigtig disciplin blandt matematikere. Det handler om ud fra et givet datasæt at finde en funktion, hvis graf gennemløber datasættet.

Det var allerede velkendt, at funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for den sags skyld) givet ved $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ giver summen af de x første naturlige tal (det x 'te trekanttal) for $x \in \mathbb{N}$. f interpolerer således trekanttallene.

Det var derfor naturligt for datidens matematikere at spørge sig selv: "Er det også muligt at finde en funktion, der interpolerer fakultetsfunktionen?" Altså en funktion, der giver $x!$ for $x \in \mathbb{N}$, men også er defineret for andre x -værdier.¹⁴

Gammafunktionen blev opfundet som en løsning til dette interpolationsproblem.

Definition 1 Der skal med Gammafunktionen forstås funktionen $\Gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Man kan let vise, at dette integral er endeligt for positive x -værdier (se f.eks. [EA, s. 11-12]).

¹⁴Med vores nutidige funktionsbegreb er det klart, at der findes uendeligt mange funktioner, der interpolerer fakultetsfunktionen. Ved blot at indtegne punkterne $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), \dots, (n, n!), \dots$ og forbinde dem på en vilkårlig måde har man konstrueret en (kontinuert!) løsning til problemet. I 1700-tallet var funktionsbegrebet imidlertid ikke så veludviklet. En funktion var snarere lig en formel eller et eksplicit udtryk.

Ved at bruge partiel integration ser man, at Gammafunktionen opfylder funktionalligningen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1)$$

Ved at bruge denne funktionalligning gentagne gange ser man, at for $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ er

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \cdot \dots \cdot (x+1)x\Gamma(x). \quad (2)$$

Ved at sætte $x = 1$ i Definition 1 ser man, at $\Gamma(1) = 1$, og ved at sætte $x = 1$ i (2) fås nu

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

der viser, at Gammafunktionen rent faktisk interpolerer fakultetsfunktionen. (Dog med forskudt argument).

Fra (2) får vi, at

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Højresiden er veldefineret for $x > -n$, når blot $x \notin \{0, -1, -2, \dots, -n+1\}$. Dermed kan vi udvide definitionsområdet for Gammafunktionen fra $]0, \infty[$ til $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Mere end blot interpolation

Skønt Gammafunktionen blev opfundet som løsning til et interpolationsproblem, stod det hurtigt klart, at funktionen var interessant i sig selv. Den spiller en vigtig rolle i sandsynlighedsregning og teoretisk fysik, og den indgår i et væld af identiteter, bl.a. en spejlingsformel, der binder den sammen med de trigonometriske funktioner.

I resten af denne artikel vil vi vise nogle af disse spændende resultater. Vi vil starte med et entydighedsresultat om Gamma-funktionen.

Entydig karakterisering på $]0, \infty[$

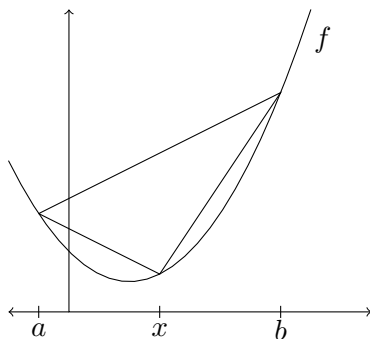
Det er klart, at der findes uendeligt mange funktioner, der opfylder funktionalligningen $f(x+1) = xf(x)$. Har man én kan man gange den med en vilkårlig periodisk funktion med periode 1, og man vil få en ny. Hvis man yderligere kræver, at funktionen skal antage værdien 1 i 1, er der stadig uendeligt mange (hvis f opfylder funktionalligningen, så vil $\frac{f(x)}{f(1)}$ også opfylde funktionalligningen og yderligere tage værdien 1 i 1). Disse to kriterier er derfor ikke nok til at karakterisere Gammafunktionen entydigt. Imidlertid er der et tredje kriterium, der sorterer Gammafunktionen ud fra de uendeligt mange andre funktioner, og det er kriteriet om *logaritmisk konveksitet*.

Definition 2 En funktion, f , siges at være konveks, hvis der for $a < x < b$ gælder

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

En strengt positiv funktion, f , siges at være logaritmisk konveks, hvis $\log f$ er konveks.

Med ord vil det sige, at en funktion er konveks, hvis hældningen af korden mellem to punkter på grafen vokser, når højre såvel som venstre endepunkt vokser.



Figur 1 En konveks funktion

I 1922 opdagede de danske matematikere Johannes Møllerup og Harald Bohr¹⁵, at disse tre kriterier var nok til at karakterisere Gammafunktionen entydigt.

Sætning 3 (Bohr-Møllerups sætning) *Gammafunktionen opfylder, at $\Gamma(1) = 1$, at $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, og at $\Gamma|_{]0, \infty[}$ er logaritmisk konveks.*

Hvis $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $]0, \infty[\subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ opfylder

- (i) $f(1) = 1$,*
- (ii) $f(x+1) = xf(x)$ for alle $x \in A$,*
- (iii) $f|_{]0, \infty[}$ er logaritmisk konveks,*

så er

$$f(x) = \Gamma(x)$$

for alle $x \in A \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

¹⁵Udover at være matematiker var han en glimrende fodboldspiller, der vandt OL-sølv med det danske landshold i 1908. Han var professor her ved instituttet, og du har måske prøvet at sidde i hans sofagruppe, der var udstillet i frokoststuen på fjerde sal i foråret.

Bevis. Vi har allerede set, at $\Gamma(1) = 1$ og at $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ er opfyldt. At vise, at Gammafunktionen er logaritmisk konveks, kræver lidt mere arbejde. Et vigtigt (og ikke trivielt) resultat om logaritmisk konvekse funktioner er, at summen af to logaritmisk konvekse funktioner igen er logaritmisk konveks. (Dette kan vises ved Hölders ulighed). Et andet vigtigt resultat er, at den punkt-vise grænse af en følge af logaritmisk konvekse funktioner igen er logaritmisk konveks. Kombinationen af disse resultater giver, at integralet af en logaritmisk konveks funktion igen er logaritmisk konveks. Vi skal altså blot vise, at $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ er logaritmisk konveks for hvert $t > 0$.

Lad $t > 0$ være givet. Nu vil $\log(t^{x-1}e^{-t}) = (x-1)\log(t) - t$ være affin og dermed konveks (kordehældningen vil være konstant og dermed svagt voksende som funktion af venstre såvel som højre endepunkt).

Antag nu, at f opfylder (i)-(iii). Ved (ii) ser vi, at

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \cdot \dots \cdot x \cdot f(x) \quad (3)$$

for alle $x \in]0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$, og ved at bruge (i), gælder

$$f(n) = (n-1)! \quad (4)$$

Dermed stemmer f overens med Γ på $\mathbb{N}$. Hvis vi kan vise, at de også stemmer overens på $]0, 1]$, så følger det af (ii), at de stemmer overens på hele $A \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Lad derfor $x \in]0, 1]$ være givet. Ved at bruge (iii) har vi følgende ulighed for $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\log f(n) - \log f(n-1)}{n - (n-1)} \right] &\leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \\ &\leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n} \end{aligned}$$

Ved brug af (4) fås nu

$$\log(n-1) \leq \frac{\log(f(x+n)) - \log((n-1)!)}{x} \leq \log(n)$$

Det vil sige

$$\log((n-1)^x(n-1)!) \leq \log(f(x+n)) \leq \log(n^x(n-1)!)$$

Ved at tage eksponentialfunktionen på denne ulighed og herefter benytte (3), fås

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Da n ikke længere indgår i den midterste term, kan vi opfatte ovenstående som to separate uligheder, der begge holder for $n \geq 2$. Altså må vi godt operere med forskellige værdier af n til venstre og højre henholdsvis, og specielt kan vi gå ind i venstresiden med $n+1$, hvilket giver

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

En simpel manipulation med disse uligheder giver

$$f(x) \frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x),$$

og tager vi grænseværdien for $n \rightarrow \infty$, får vi

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

for alle $x \in]0, 1]$.

Da Γ også opfylder (i)-(iii), må der ligeledes gælde

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (5)$$

for $x \in]0, 1]$, hvorved sætningen er vist. $\square$

Stirlings Formel og Gauss' Multiplikationsformel

Bohr-Mollerups sætning gør det let at vise identiteter om Gammafunktionen. Vi vil her illustrere dette, ved at vise to store resultater om Gammafunktionen ved hjælp af den.

Sætning 4 (Stirlings Formel) *For $x > 0$ er*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\mu(x)}, \quad (6)$$

hvor $\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ og $g(x) = (x + \frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{x}) - 1$.

(Gauss' Multiplikationsformel) *For hvert $p \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ er*

$$\Gamma(x) = p^{x-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} \Gamma(\frac{x}{p}) \Gamma(\frac{x+1}{p}) \cdots \Gamma(\frac{x+p-1}{p}). \quad (7)$$

Stirlings formel er en måde at approksimere Gammafunktionen på ved hjælp af simple funktioner. $\mu(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, så fejlen ved at se bort fra μ bliver mindre og mindre, des større x bliver.

Gauss' Multiplikationsformel er en æstetisk sammenhæng mellem $\Gamma(x)$ og $\prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\frac{x+i}{p})$, der holder for alle naturlige tal p .

Vi viser de to formler ved først at vise to lemmaer, der giver os formlerne på nær nogle multiplikative konstanter. Dernæst fastslår vi konstanterne.

Lemma 5 For hvert $p \in \mathbb{N}$ findes en konstant $b_p \in \mathbb{R}$ så

$$\Gamma(x) = b_p \cdot p^x \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{x+i}{p}\right)$$

for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Bevis. Lad $p \in \mathbb{N}$ og lad $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ betegne funktionen med forskriften

$$f(x) = p^x \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{x+i}{p}\right).$$

Vi viser, at f opfylder (ii) og (iii) fra Bohr-Mollerups sætning. Derved adskiller f sig fra Γ med en multiplikativ konstant, og lemmaet er vist.

Vi ser, at $x \mapsto p^x$ er logaritmisk konveks for $x > 0$, da $\log p^x = x \log p$ er affin. Da Γ er logaritmisk konveks på $]0, \infty[$, er $x \mapsto \Gamma(\frac{x+i}{p})$ det også for $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Produktet af logaritmisk konvekse funktioner er igen logaritmisk konveks, og dermed opfylder f kriterium (iii) fra Bohr-Mollerups sætning. f opfylder også funktionalligningen, da

$$\begin{aligned} f(x+1) &= p^{x+1} \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+p}{p}\right) \\ &= p \cdot p^x \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) \cdot \frac{x}{p} \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \\ &= x f(x) \end{aligned}$$

for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. □

Lemma 6 Der findes et $a \in \mathbb{R}$ så

$$\Gamma(x) = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\mu(x)}, \quad x > 0,$$

hvor μ er som i (6).

Bevis. Af hensyn til artiklens omfang udelader vi beviset for, at rækken for μ konvergerer, og at $\mu(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$. (For et bevis se [EA, s. 21-22].

Vi bærer os ad som i beviset for Lemma 5. Lad først funktionen f være givet ved $f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}$ for $x > 0$. Først viser vi den logaritmiske konveksitet på $]0, \infty[$. Hvis vi kan vise, at $x \mapsto x^{x-\frac{1}{2}}$, $x \mapsto e^{-x}$ og $x \mapsto e^{\mu(x)}$ hver især er logaritmisk konveks, så vil deres produkt, f , også være det. En funktion er konveks, hvis og kun hvis dens andenafledede er ikke-negativ.

$x \mapsto x^{x-\frac{1}{2}}$ er logaritmisk konveks, da

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \log(x^{x-\frac{1}{2}}) &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) \log(x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\log(x) + \frac{x-\frac{1}{2}}{x} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0 \end{aligned}$$

for $x > 0$.

Ligeledes er $x \mapsto e^{-x}$ logaritmisk konveks, da

$$\frac{d^2}{dx^2} (\log(e^{-x})) = \frac{d^2}{dx^2} (-x) = 0,$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og dermed specielt for $x > 0$.

Hvis vi kan vise, at $x \mapsto g(x)$ er konveks, så vil $x \mapsto \mu(x)$ være konveks (da konveksitet bevares ved summer og grænseværdier).

Men dette svarer netop til, at $x \mapsto e^{\mu(x)}$ er logaritmisk konveks.

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left((x + \tfrac{1}{2}) \log(1 + \tfrac{1}{x}) - 1 \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\log(1 + \tfrac{1}{x}) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2(1 + \frac{1}{x})} \right) \\
 &= \frac{-1}{x^2(1 + \frac{1}{x})} - \frac{x^2(1 + \frac{1}{x}) - (x + \frac{1}{2})(2x(1 + \frac{1}{x}) - \frac{x^2}{x^2})}{x^4(1 + \frac{1}{x})^2} \\
 &= \frac{-2x^2(1 + \frac{1}{x}) + 2x^2(1 + \frac{1}{x}) - x + x(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{2}}{x^4(1 + \frac{1}{x})^2} \\
 &= \frac{1}{2x^4(1 + \frac{1}{x})^2} > 0,
 \end{aligned}$$

for $x > 0$, så g er konveks.

Nu mangler vi blot at vise, at f opfylder Gammafunktionens funktionalligning. Ved at skrive

$$\begin{aligned}
 f(x+1) &= (x+1)^{x+\frac{1}{2}} e^{-x-1} e^{\mu(x+1)} \\
 f(x) &= x^{x+\frac{1}{2}} x^{-1} e^{-x} e^{\mu(x)},
 \end{aligned}$$

ser vi, at

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \frac{x}{e} e^{\mu(x+1)-\mu(x)}. \quad (8)$$

Vi undersøger $\mu(x+1) - \mu(x)$:

$$\begin{aligned}
 \mu(x+1) - \mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n+1) - g(x+n) \\
 &= -g(x) + \lim_{m \rightarrow \infty} g(m) \\
 &= -g(x) + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{m+\frac{1}{2}} - 1 \right) \\
 &= -g(x) + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m + \log \sqrt{1 + \frac{1}{m}} - 1 \right) \\
 &= -g(x) + \log(e) + \log(\sqrt{1}) - 1 = -g(x).
 \end{aligned}$$

Ved at indsætte

$$e^{\mu(x+1) - \mu(x)} = e^{-g(x)} = \frac{e}{e^{\log(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}}$$

i (8) får vi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x$$

for alle $x > 0$, hvorved der ved Bohr-Møllerups sætning findes en konstant a , så $\Gamma(x) = af(x)$ for alle $x > 0$. $\square$

Nu er vi klar til at vise Sætning 4.

Bevis. Det vi skal vise er blot, at $a = \sqrt{2\pi}$ i Lemma 6 og $b_p = p^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}$ i Lemma 5. Imidlertid får vi brug for næsten al den teori, vi hidtil har udviklet om Gammafunktionen. Lad $p \in \mathbb{N}$. For at (i) fra Bohr-Møllerups sætning kan være overholdt, må

$$b_p^{-1} = p \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{i}{p}\right).$$

Går vi ind i denne formel med (5),¹⁶ får vi

$$\begin{aligned}
 b_p^{-1} &= p \prod_{i=1}^p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! \cdot n^{\frac{i}{p}}}{\frac{i}{p}(\frac{i}{p} + 1) \cdot \dots \cdot (\frac{i}{p} + n)} \right) \\
 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^p \left(\frac{n! \cdot n^{\frac{i}{p}} \cdot p^{n+1}}{i(i+p) \cdot \dots \cdot (i+np)} \right) \\
 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n!)^p \cdot n^{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p i} \cdot p^{np+p}}{(np+p)!} \right) \\
 &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n!)^p \cdot n^{\frac{p+1}{2}} \cdot p^{np+p}}{(np+p)!} \right).
 \end{aligned}$$

Den sidste linje ganger vi med

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{i}{np} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^p \left(\frac{np+i}{np} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(np+p)!}{(np)! \cdot (np)^p},$$

og får

$$b_p^{-1} = p \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n!)^p \cdot n^{\frac{1-p}{2}} \cdot p^{np}}{(np)!} \right).$$

Nogle af faktorerne kan nu omskrives vha. Lemma 6.

$$(n!)^p = (n \cdot a \cdot n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n+\mu(n)})^p = a^p \cdot n^{np+\frac{p}{2}} \cdot e^{-np+p\mu(n)}.$$

$$(np)! = a \cdot (np)^{np+\frac{1}{2}} \cdot e^{-np+\mu(np)}.$$

Indsættes disse i udtrykket for b_p^{-1} , fås

$$b_p^{-1} = \sqrt{p} \cdot a^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{p\mu(n)-\mu(np)}.$$

¹⁶Vi har kun vist, at formel (5) holder på $]0, 1]$, men det er let at udvide til $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Da imidlertid $\mu(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, vil $p\mu(n) - \mu(np) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, og

$$b_p^{-1} = \sqrt{p} \cdot a^{p-1}. \quad (9)$$

For $p = 2$ har vi altså

$$\sqrt{2} \cdot a = b_2^{-1} = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi},$$

hvor vi ved sidste lighedstegn har brugt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (hvilket kan vises uafhængigt af denne sætning, f.eks. ved formelen $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$). Nu har vi, at $a = \sqrt{2\pi}$ og ved (9) at $b_p = p^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}}$, hvorved sætningen er vist. $\square$

Blod på tanden?

Har du fået blod på tanden og vil vide mere om Gammafunktionen, så skal du være velkommen til at læse mit bachelorprojekt (henvendelse på m10jsj@math.ku.dk), der udover resultaterne i denne artikel også indeholder en udvidelse af Gammafunktionen til at tage komplekse værdier, samt en masse saftige resultater om den komplekse Gammafunktion.

Litteratur

- [EA] ARTIN, EMIL: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston (1964). (Oversat af M. Butler fra den tyske originaludgave “*Einführung in die Theorie der Gammafunktion*”, B. G. Teubner (1931)),
[http://www.plouffe.fr/simon/math/Artin%20E.%20The%20Gamma%20Function%20\(1931\)\(23s\).pdf](http://www.plouffe.fr/simon/math/Artin%20E.%20The%20Gamma%20Function%20(1931)(23s).pdf).