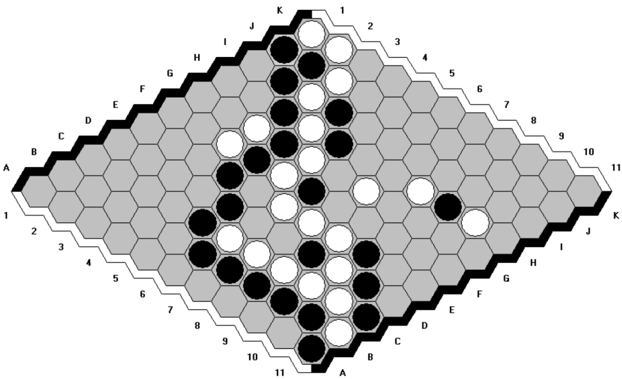
Hex

– Et kompliceret spil med simple regler

Bo 'Maling' Malling Christensen

Tidligere i år skrev FAMØS om spillet Go blandt andet kendt fra filmen »A Beautiful Mind«.
Hex er et spil meget i samme stil som Go i den forstand, at spillet, trods dets simple regelsæt, er ekstremt kompliceret at analysere. Man spiller normalt Hex på et diamantformet bræt bestående af 11×11 sekskanter. Ved skiftevis at tage sin tur gælder det om at forbinde en side med dens modstående side med sine brikker.

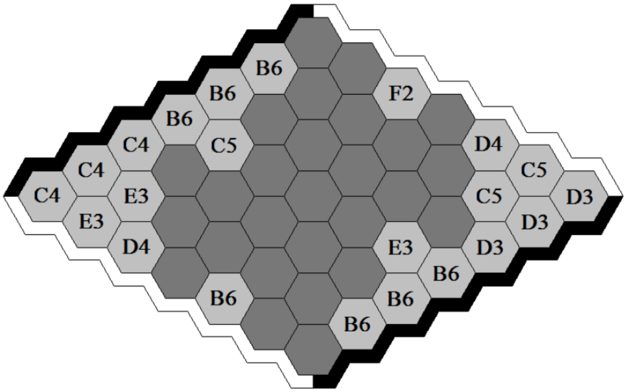


Figur 1 Et afgjort standardspil Hex hvor sort har vundet ved at forbinde $A11$ og $J1$

Selv om Hex i den mest populære udgave (11×11) endnu ikke er blevet løst, end ikke ved hjælp af de kraftigste computere og det bedste software[2], så er mange mindre udgaver løst. Senest er der i 2009 fundet en vindende strategi for hvid på 9×9. Man

[2] Der afholdes årligt konkurrencer, hvor computerprogrammer dyster mod hinanden i endnu ikke løste spil, såsom Go, Skak og Hex.

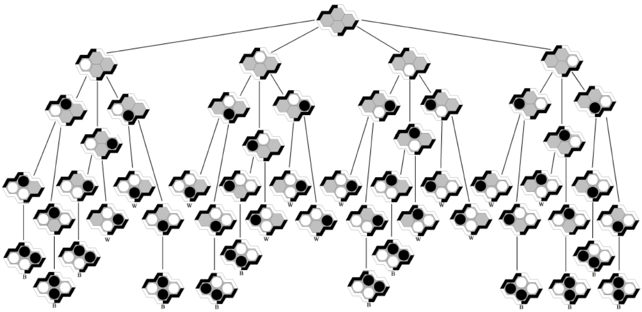
estimerer imidlertid, at det vil tage *halvandet årtusinde* at løse 10×10 med nuværende udstyr – og derfra er der stadig langt til, at standardudgaven af spillet er løst.



Figur 2 7×7 Hex løst. Ved at starte spillet på de sorte felter kan man gennemtvinge en sejr. De resterende felter angiver, hvor man som nummer to skal spille for at kunne gennemtvinge en sejr, skulle den første spiller starte her.

Man kan ret hurtigt overbevise sig selv om, at Hex aldrig kan ende uafgjort, og der vil altid være netop én vinder. Helt tydeligt kan begge spillere ikke vinde. Omvendt, kan man – ved hjælp af lidt simpel grafteori – vise, at det ikke kan lade sig gøre, at ingen af spillerne får koblet sine sider sammen. Derfor er der kun muligheden tilbage, at spillet altid vil have netop én vinder.

Det er tydeligt, at eftersom samtlige træk kan kortlægges, så kan man lave et såkaldt spiltræ og ud fra dette, finde ud af hvem der har den vindende strategi. Bemærk for 2×2, at hvis hvid



Figur 3 Et komplet spiltræ over 2×2.

starter i en af midterpositionerne, så kan han tvinge en sejr hjem. Til gengæld, hvis man starter i de spidse hjørner, så kan sort tvinge en sejr hjem. Det viser sig faktisk, at lige meget hvor stor pladen er, så kan sort altid tvinge en sejr, hvis hvid starter i disse hjørner.

Theorem 1 *Første spiller (hvid) har en vindende strategi på $n \times n$.*

Bevis. Vi ved allerede, at en af spillerne har en vindende strategi. Antag det er spiller to (sort).

For n lige:

Lad hvid spille et tilfældigt sted. Da brættet er symmetrisk, og sort har en vindende strategi, kan hvid blot kopiere sorts træk symmetrisk. Skulle sort spille det symmetriske sted til hvids åbningstræk, så spiller hvid bare et nyt tilfældigt sted.

For n ulige:

Lad hvid spille i midterfeltet. Da resten af brættet er symmetrisk, og sort har en vindende strategi, kan hvid blot kopiere sorts træk symmetrisk.

I begge tilfælde vil hvid altid have mindst lige så mange brikker på brættet som sort, og eftersom enhver brik aldrig kan være en ulempe, så står hvid mindst lige så godt stillet som sort. Men sort havde jo en vindende strategi, så vores antagelse må være forkert. Ergo har hvid en vindende strategi. □

Denne strategityveri-taktik er et velkendt bevis for symmetriske spil af denne type. Desværre er det blot et eksistensbevis, så det giver os ingen idé om, hvordan en generel løsning kunne se ud.

For at undgå at hvid lægger for stærkt ud, har man mange steder tilføjet **Swap Rule**, der tillader sort at bytte brikker med hvid efter åbningen af spillet. Dog, eftersom der altid findes en vindende strategi for enten sort eller hvid, kan sort altid vinde spil, der benytter Swap Rule.

Der er analyseret adskillige træk, som gør, at man kan nøjes med at kigge på en brøkdel af kombinationerne, når man prøver at finde de vindende strategier. Kan du gennemskue nogle af dem? Spil spillet et par gange med en ven og se om du kan finde frem til nogle gode tommelfingerregler, og om de altid gælder.