Her nytter ‘solve’ ikke!
– Svar på opgaver fra FAMØS 22.3

Asbjørn Nordentoft og Sune Precht Reeh

Løsning af præmieopgaven

a) Find samtlige $(x,y) \in \mathbb{R}$, der opfylder $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.
b) Vælg $x, y > 0$ vilkårligt og lad $s = \min(x, y, \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$. Find den størst mulige værdi af s.

Svar indsendt af Asbjørn Nordentoft (mat ’12):
a) Hvis vi antager, at $x = 0$, bliver ligningen til:

$$y^3 = y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2(y-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (y = 0 \;\vee\; y = 1)$$

Antag nu, at $x \neq 0$. Vi kan nu dividere igennem med x^2, og dermed får vi:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x + \left(\frac{y}{x}\right)^3 \cdot x = 1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)$$

Sæt nu $a = \frac{y}{x}$, så omskrives ligningen til $x + a^3 \cdot x = 1 + a^2$. Hvis $a = -1$ får vi:

$$x + (-1)^3 \cdot x = 1 + 1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2,$$

hvilket åbenlyst er en modstrid. Dette betyder, at $a \neq -1$ og dermed $a^3 + 1 \neq 0$. Vi kan derfor omskrive udtrykket:

$$x \cdot (1 + a^3) = 1 + a^2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1+a^2}{1+a^3}.$$

Dette giver os

$$y = \frac{y}{x} \cdot x = a \cdot \frac{1+a^2}{1+a^3} = \frac{a+a^3}{1+a^3}$$

Alt i alt er samtlige løsninger (x, y) givet ved:

$$(0,0), \quad (0,1) \quad \text{og} \quad \left(\frac{1+a^2}{1+a^3}, \frac{a+a^3}{1+a^3}\right), \ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b) For $x = y = \sqrt{2}$ får vi oplagt:

$$x = y = \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

I dette tilfælde er $s = \sqrt{2}$. Jeg påstår, at disse x og y maksimerer s. Hvis der enten gælder $x < \sqrt{2}$ eller $y < \sqrt{2}$, får vi oplagt, at $s < \sqrt{2}$. Hvis derimod $x, y \geq \sqrt{2}$, får vi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, hvilket giver os:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Dermed får vi også i dette tilfælde $s \leq \sqrt{2}$. Alt i alt er $s \leq \sqrt{2}$ for alle $x, y > 0$, hvor lighed kun gælder, hvis $x = y = \sqrt{2}$. Dermed er $\max_{x,y>0}(s) = \sqrt{2}$.

Løsning ekstraopgaven

Hvor mange af de første 100 *naturlige tal ligger i billedmængden af afbildningen:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor,$$

hvor $\lfloor \cdot \rfloor$ *betegner floor-funktionen?*[13]

[13] Wikipedia is your friend.

Svar indsendt af Sune Precht Reeh (fra forsiden):

Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være funktionen givet i opgaven ved

$$f(x) := \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor.$$

En hurtig udregning viser, at funktionen opfylder

$$\begin{aligned} f(x + \tfrac{1}{2}) &= \lfloor 2x + 1 \rfloor + \lfloor 4x + 2 \rfloor + \lfloor 6x + 3 \rfloor + \lfloor 8x + 4 \rfloor \\ &= \lfloor 2x \rfloor + 1 + \lfloor 4x \rfloor + 2 + \lfloor 6x \rfloor + 3 + \lfloor 8x \rfloor + 4 \\ &= f(x) + 10. \end{aligned}$$

Hvis $a \in \mathbb{Z}$ ligger i billedet af f, vil der derfor gælde, at $a + 10k$ ligger i billedet af f for alle $k \in \mathbb{Z}$; for hvis vi har $a = f(x)$, så er $a + 10k = f(x + \frac{k}{2})$. Når vi skal bestemme billedet af f, er det derfor tilstrækkeligt at undersøge hvilke af tallene 0 til 9, der optræder i billedet af f. Funktionen f er en sum af svagt voksende funktioner, så f er svagt voksende. Desuden er $f(0) = 0$ og $f(\frac{1}{2}) = f(0) + 10 = 10$, så tallene 1 til 9 kan kun optræde i billedet af f på intervallet $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

For $n \in \mathbb{N}$ er funktionen $x \mapsto \lfloor nx \rfloor$ konstant på ethvert interval $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, hvor k er et heltal. Mindste fælles multiplum af $2, 4, 6$ og 8 er 24, og f er derfor konstant på intervallerne $\left[\frac{k}{24}, \frac{k+1}{24}\right[$ for $k \in \mathbb{Z}$. For at bestemme f på intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ behøver vi kun at udregne værdierne $f(\frac{k}{24})$ for $k = 0, 1, \ldots, 24$, hvorved vi får nedenstående beskrivelse af f på intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{8}, \\ 1 & \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{6}, \\ 2 & \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{4}, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 4 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3}, \\ 5 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{8}, \\ 6 & \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 10 & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Grafen for f på $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ er desuden illustreret i figur 1.

Vi kan nu konkludere, at et heltal a ligger i billedet af f, hvis og kun hvis a kan skrives som $0, 1, 2, 4, 5$ eller 6 plus et multiplum af 10, hvis a er et ikke-negativt heltal, betyder det netop, at sidste ciffer i a er en af de seks muligheder. Tilbage er blot at konstatere, at fra 1 til 100 er der $10 \cdot 6 = 60$ tal, hvor sidste ciffer er enten $0, 1, 2, 4, 5$ eller 6, så svaret på opgaven er 60.

Figur 1 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ på intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$