

Hvad er et tal?

Dan Saattrup Nielsen

Det virker måske som et spøjst spørgsmål, men ved nærmere eftertanke virker det som om, at alle vores definitioner af tal refererer til andre matematiske begreber. F.eks. kunne man måske sige, at tallet 1 var det objekt, der repræsenterede antallet af næser, du har (hvis vi antager, at du er et nogenlunde normalt menneske); eller hvis man er til mængdelære, ville man måske definere 1 som $\{\emptyset\}$. Men begge disse metoder beskriver blot tallet 1 med hhv. kardinaliteter og mængder. Er det ikke muligt, at definere hvad et tal er uafhængigt af anden matematik?

Dette er, hvad matematikeren og filosofen Gottlob Frege (1848-1925) ville prøve at give sig i kast med. Nærmere betegnet ville han gerne kunne definere alle de naturlige tal udelukkende ved brug af logik³. Han fik opbygget en yderst elegant og intuitiv teori, som dog senere hen blev angrebet og endte ud i, at han opgav teorien fuldstændigt - dette ledte dog andre filosoffer, såvel som matematikere, til at videreudvikle hans idéer. Vi vil her vise, hvordan hans teori så ud, og hvad der fik hele fundamentet til at smuldre.

Først og fremmest skal vi lige have et par småting på plads for at kunne forstå definitionerne. Et *begreb* er ment som en grundlæggende tanke omkring *beskrivelsen* af objekter - f.eks. er "at være rød" et begreb, da dette kan bruges til at beskrive røde objekter. Derudover siger vi, at et objekt *falder ind under* et begreb, hvis objektet bliver beskrevet af begrebet - med ovenstående eksempel kan vi så sige, at jordbær falder ind under begrebet "at være rød".

³Egentlig havde han til mål at dække *al* matematik, men han startede nu engang beskedent ud med tal.

Frege definerer så, at tallet 0 *dækker over* et begreb, hvis det, lige meget hvad a er, altid holder, at a ikke falder ind under begrebet. Altså hvis begrebet eksempelvis er “menneske uden hjerne”, så for at et objekt kan falde under et sådan begreb, kræver det, at objektet er et menneske og ikke har en hjerne. Men da et sådant objekt ikke eksisterer (håber jeg stærkt på), vil det derfor gælde, at tallet 0 dækker over “menneske uden hjerne”. Bemærk, at vi ikke har defineret *hvad* tallet 0 er, men kun hvad dette mystiske objekt dækker over.

Herfra definerer han så rekursivt, at tallet $(n + 1)$ dækker over et begreb F , hvis der findes et objekt a , som falder ind under F , og at tallet n dækker over begrebet “falder ind under F , men er ikke identisk⁴ med a ” - for at forstå dette en smule bedre vil vi forsøge at definere 1. Lad os starte med begrebet F som værende “er Eiffeltårnet i Paris”. For at 1 kan dække over dette begreb, skal der først og fremmest findes et objekt, som falder ind under det; det overlades som en øvelse til læseren. Dernæst skal tallet 0 dække over begrebet “falder ind under F men er ikke identisk med Eiffeltårnet i Paris”, som, ved at indsætte begrebet F , bliver til “falder ind under ‘er Eiffeltårnet i Paris’, men er ikke identisk med Eiffeltårnet i Paris”. Da der ikke findes nogen objekter, som falder ind under dette begreb, dækker 0 per definition over det; altså dækker 1 over F .

For at have en definition af tallene selv og ikke bare hvad de dækker over, definerer han, at n er et tal, hvis og kun hvis at der findes et begreb, som n dækker over. Altså er tallene defineret! Der er blot et lille problem. Disse definitioner lægger op til, at der findes mange *forskellige* former for 0, 1 osv. Da dette bliver

⁴Frege bruger “identisk”, som værende at man kan udskifte de to med hinanden uden at ændre sandhedsværdien.

noget bøv!l, vælger Frege at definere 0 som tallet, der dækker over begrebet “ikke lig med sig selv” og $(n + 1)$ til at være tallet, som dækker over begrebet “lig med n ”. Tjek at denne definition faktisk *er* et specialtilfælde af den foregående!

Nu kunne man komme til at tro, at vi var færdige. Men alt, hvad vi har gjort, er at definere en hulens masse. Jovist, vi har retfærdiggjort en eksistens af disse objekter, som vi tillader os at kalde for tal. Men for at det virkelig *er* tal, så kræver det, at de opfører sig, som vi forventer, at tal nu engang gør. Men hvordan kan vi overhovedet sige, hvornår at et tal er lig med et andet tal? Hvordan ved vi at 1 er større end 0? Hvad er $1 + 1$?

Han lagde ud med at besvare identitetsspørgsmålet, ved at til-lade *Humes princip* som et logisk aksiom:

Definition 1 (Humes princip) For alle begreber F , G , gælder det, at tallet, der dækker over F , er identisk med tallet, der dækker over G , hvis og kun hvis der er en en-til-en korrespondance imellem objekterne, som falder under F og G .

Dette viste sig dog at skabe komplikationer, for dette princip skabte, hvad der bliver kaldt for *Cæsar-problemet* - som egentlig blot er, at princippet ikke kan svare på, om tallet, dækkende over et begreb F , er identisk med Julius Cæsar. Et fjollet spørgsmål kunne man måske tænke, men humlen ligger i, at princippet ikke kan sammenligne tal, der dækker over et begreb og andre objekter, der ikke nødvendigvis falder indenfor denne kategori. Frege var ikke tilfreds.

Hans løsning var at erstatte Humes princip med noget bedre, som, han besluttede, skulle handle om *udvidelser* af begreber. En udvidelse af et begreb skal ses som et objekt, der “indeholder” alle de objekter, der falder under begrebet. Altså kan man vælge

at se det som en slags mængde af objekter, uden at det direkte har noget med mængdelære at gøre. Hans formulering af hans erstatning blev kaldt det originale navn “Basic Law V”:

Definition 2 (Basic Law V) For alle begreber F , G , gælder det, at udvidelsen af F er identisk med udvidelsen af G , hvis og kun hvis det for alle objekter a gælder, at a falder under F , hvis og kun hvis a falder under G .

For at dette havde relevans til tal, redefinerede han hans definition af tal, til at et tal dækker over et begreb F , hvis og kun hvis tallet er en udvidelse af begrebet “har en en-til-en korrespondance med begrebet F ”. Igen er n et tal, hvis og kun hvis der er et begreb, som n dækker over. Dette er hvad, der senere hen skabte problemer for Frege - men inden vi blot frastøder hans idéer, så kan vi lige se, hvordan han brugte dette til at vise, at der var uendelig mange naturlige tal.

Med identitetsproblemet fikset ville Frege nu finde en logisk måde at repræsentere tallenes orden; han besluttede at benytte følger. Han definerede, at n direkte følger m i følgen af naturlige tal, hvis og kun hvis der er et begreb F og et objekt x faldende under F , så tallet, som dækker over begrebet F , er n , og at tallet, som dækker over begrebet “falder under F men er ikke identisk med x ”, er m . Det er en lille mundfuld, men det fanger dog den intuitive fornemmelse af dét at “direkte følge” efter noget andet. Fra dette kunne han så let bevise at $0 < 1^5$. Dermed kunne han definere $n + 1$ som værende det tal, som direkte følger n i følgen af naturlige tal, hvilket medfører at $1 + 1 = 2$, da tallet 2 dækker over begrebet “lig med 1”.

⁵Altså at $0 < 1$ og intet naturligt tal findes imellem de to.

Hans sidste udfordring var at definere, at der findes uendelig mange naturlige tal. Selvfølgelig havde han ikke induktion til rådighed, da han arbejder nede på det grundlæggende niveau, så han måtte komme på andre idéer. Han formulerede sætningen som

Sætning 3 *Tallet, der dækker over begrebet “tilhører følgen af naturlige tal, sluttende med n ”, følger n direkte i følgen af naturlige tal.*

Beviset giver han kun en kort skitse af, da det ellers “would take us too far afield”. Et af lemmaerne, der skal bruges til beviset, er

Lemma 4 *Hvis a direkte følger d i følgen af naturlige tal, og hvis tallet, der dækker over begrebet “tilhører følgen af naturlige tal sluttende med d ”, direkte følger d i følgen af naturlige tal, så gælder det, at tallet, som dækker over begrebet “tilhører følgen af naturlige tal sluttende med a ”, direkte følger a i følgen af naturlige tal.*

Til at bevise dette skal det bl.a. vises, at a er tallet, der dækker over begrebet “tilhører følgen af naturlige tal, men er ikke lig med a ”, og for at bevise dette skal det vises, at dette begreb har den samme udvidelse som begrebet “tilhører følgen af naturlige tal sluttende med d ”. Til at vise dette skal det først bevises, at intet *endeligt*⁶ objekt kan følge sig selv i følgen af naturlige tal. Ja, det samlede bevis bliver ret langhåret. Efter alt dette kunne han dog definere det første uendelige tal $\aleph_0$ ⁷ som tallet, der dækker over begrebet “er et endeligt tal”.

⁶Han definerer *endelige* tal som tal, der tilhører følgen af naturlige tal begyndende med 0.

⁷Han brugte notationen ∞_1 , men her er brugt den moderne notation.

Frege kom igennem hele det ovenstående bevis og fik bevist, at der er uendeligt mange tal og vigtigere, at tallene kunne defineres logisk (han mente også, at Basic Law V var selvindlysende logisk). Ni år senere, i år 1902, fik Frege et brev fra Bertrand Russell. I det fremlagde Russell et paradoks, som han lige havde opdaget - et paradoks, som nu kaldes Russells paradoks:

Lad R være begrebet, der dækker over et objekt x , hvis og kun hvis der er et begreb F , sådan at x er udvidelsen af F , og at x ikke falder under F . Lad nu r være udvidelsen af R og antag at r falder under R . Da findes der et begreb F , så r er udvidelsen af F , og r ikke falder under F . Jf. Basic Law V falder r heller ikke under R , modstrid. Altså må r ikke falde under R . Dermed findes der et begreb F (nemlig R), så r er udvidelsen af F , og r ikke falder under F . Men per definition af R betyder dette, at r falder under R , modstrid.

Dermed er Basic Law V inkonsistent. Frege sendte et høfligt brev tilbage til Russell, hvori han nævnte, at Russells opdagelse var ekstraordinær, og vil betyde en masse fremskridt indenfor logikken, men at det desværre også gjorde, at hele Freges arbejde gik til grunde. Efter dette forsøgte Frege at redde, hvad han kunne, men han endte med at opgive hele projektet. Russell tog dog faklen op og konstruerede hans egen teori fra bunden, kaldet typeteori, hvor han undgik disse problemer. Der forskes stadig i typeteori den dag i dag som et fundament for al matematik. Hans teori bruger dog aksiomer, som ikke kan retfærdiggøres ud fra logik alene, så Freges forsøg på at opbygge al matematik ud fra logik er i stedet blevet genoptaget af nylogicismen, som går tilbage og begynder fra Humes princip igen. Disse "nylogicister"

findes stadig i dag - så hele ånden i at logikken må ligge som et grundfundament lever stadig.

Litteratur

- [1] Frege, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, 1884. Oversat af Michael S. Mahoney.
- [2] Shapiro, Stewart. *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics*. Oxford University Press, 2000.