

# FAMØS

FAMØS november 2013  
Fagblad for Aktuar, Matematik,  
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:  
Jingyu She (forside)

Deadline for næste nummer:  
1. januar 2013

Indlæg modtages gerne og bedes sendt  
til [famos@math.ku.dk](mailto:famos@math.ku.dk) – gerne i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
og gerne baseret på skabelonen  
som kan hentes på hjemmesiden.

FAMØS er et internt fagblad.  
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS  
c/o Institut for Matematiske Fag  
Matematisk Afdeling  
Universitetsparken 5  
2100 København Ø  
<http://www.math.ku.dk/famos/>

Oplag: 400 stk.  
ISSN: 1903-2722

23. årgang, nr. 2, november 2013

# FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik  
23. årgang, nr. 2, november 2013

LÆSER DU IKKE NORMERET?  
UD!

REGERINGEN OG KU SVINGER  
PISKEN MED SÅKALDT  
STUDIEFREMDRIFTSREFORM

*Mød op til stormøde  
21. november kl. 17.30,  
aud. 3 på HCØ,  
og giv din mening til kende!*

Vores udsendte til KUUR's torsdagsmøde informerer om  
konsekvenserne af KU's tiltag (side 5).

# Redaktion

---

- \* Jingyu She,
- \* Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
- \* Nilm Abrahamson,
- \* Sebastian Peek,
- \* Søren Wengel Mogensen

DIT NAVN KUNNE STÅ PÅ DENNE SIDE!

*Head venter du på? Skriv til famos@math.ku.dk  
i dag, og bliv redaktør i morgen!*

## Indhold

---

<b>Læser du ikke normeret? UDI!</b> . . . . .	<b>5</b>
<i>Vores udsendte informerer om KUUR's torsdagsmøde</i>	
<b>Sylvesters kriterium</b> . . . . .	<b>9</b>
<i>Side 9-sætning</i>	
<b>Sådan smager dit nærmiljø</b> . . . . .	<b>21</b>
<i>Anmeldelser</i>	
<b>En statistikstuderendes bekendelser</b> . . . . .	<b>23</b>
<i>Om at skrive BSc-opgave i anvendt statistik</i>	
<b>Sandsynlighedsbaserede metoder</b> . . . . .	<b>29</b>
<i>Monte Carlo-metoden</i>	
<b>Sweaving R and L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X</b> . . . . .	<b>41</b>
<i>English article</i>	
<b>Spareråd til studerende: Bliv falskmøntner</b> . . . . .	<b>47</b>
<i>Premieopgave og ekstraopgave</i>	
<b>Løsning på præmieopgave</b> . . . . .	<b>49</b>
<i>Anders Druedahl og Martin Andersen</i>	
<b>Løsning af præmie- og ekstraopgave</b> . . . . .	<b>52</b>
<i>Martin Wedel Jacobsen</i>	

ikke indeholdt i andre hyperplaner end dem i  $U$ , så det er nok at finde en sektion  $A$  med  $m(\overline{A}) = m$ .

Lad  $v$  være vektoren fra  $m$  til  $O$ ; per Lemma 4 ligger  $v$  i normalrummet til  $L$  i  $m$ , og den er dermed ikke lineært uafhængig af normalvektorerne til hyperplanerne i  $U$ . Lad nu  $H$  være hyperplanen gennem  $m$  med normalvektor  $v$ , og lad  $K$  være det halvrum der afgrænses af  $H$  og ikke indeholder  $O$ . Da er  $m = m(\overline{K})$ , så det er nok at finde en sektion som støder op til  $m$  og er indeholdt i  $K$ . At dette er muligt følger nu af beviset for Lemma 1.  $\square$

**Sætning 11** *Hyperplanerne i  $V$  opdeler  $\mathbb{R}^n$  i  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$  sektioner såfremt enhver mængde af op til  $n$  hyperplaner i  $V$  har lineært uafhængige normalvektorer og der ikke findes  $n + 1$  hyperplaner i  $V$  med ikke-tom fællesmængde, og en sådan konfiguration er mulig at opnå for ethvert  $n$  og  $s$ .*

*Denne side er tom.*

*Bevis.* Lad der være givet  $k$  hyperplaner  $H_1, \dots, H_k$  i  $V$  med  $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$ . Per anden antagelse er  $k \leq n$ , og per første antagelse har  $H_1, \dots, H_k$  så lineært uafhængige normalvektorer. Vores antagelse efter Lemma 1 er dermed opfyldt, så vi kan bruge Lemma 10 til at konkludere at for enhver delmængde  $U$  af  $V$  med højst  $n$  elementer findes der en sektion  $A$  med  $V_A = U$ .

At det er muligt at opnå denne konfiguration ses ved at placere hyperplaner en af gangen. Når en hyperplan placeres skal dens normalvektor ikke ligge i de delrum af  $\mathbb{R}^n$  der udspringes af op til  $n - 1$  normalvektorer for tidligere placerede hyperplaner, og dette er muligt da disse delrum har dimension højst  $n - 1$ . Desuden skal hyperplanen ikke placeres så den indeholder et skæringspunkt for  $n$  tidligere placerede hyperplaner, hvilket er muligt da der kun er tale om endeligt mange punkter.  $\square$

i  $\bar{A}$ , hvilket medfører at  $m(\bar{A})$  er lokalt minimum for  $d$  på  $L$ . Per Lemma 3 er så  $m(\bar{A}) = m(L)$ .  $\square$

**Sætning 8** Hvis  $V_A = V_B$  er  $A = B$ .

*Bevis.* Antag at  $A \neq B$  men  $V_A = V_B$ . Lemma 7 giver at  $m(\bar{A}) = m(\bar{B})$ , så vi sætter  $m = m(\bar{A})$  og betragter en omegn omkring  $m$ . Lad  $k = |V_A|$ ; per Lemma 2 kan vi vælge  $k - 1$  hyperplaner  $H_1, \dots, H_{k-1} \in V_A$  således at i en omegn omkring  $m$  i  $L = \bigcap_{i=1}^{k-1} H_i$  er alle punkter indeholdt i euten  $\bar{A}$  eller  $\bar{B}$ . Dette betyder at  $m$  er lokalt minimum for  $d$  på  $L$ , så  $m = m(L)$ . Dermed er  $m(L)$  indeholdt i hyperplanen i  $V_A$  forskellig fra  $H_1, \dots, H_{k-1}$ , hvilket er i modstrid med Lemma 5.  $\square$

**Korollar 9** Hyperplanerne i  $V$  opdeler  $\mathbb{R}^n$  i højst  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$  sektioner.

*Bevis.* Vi har til hver sektion tildelt en delmængde af  $V$  bestående af hyperplaner med ikke-tom fællesmængde. Disse hyperplaner skal så have lineært uafhængige normalvektorer, så der er højst  $n$  af dem. Dermed er der højst lige så mange sektioner af  $\mathbb{R}^n$  som der er delmængder af  $V$  med højst  $n$  elementer.  $\square$

**Lemma 10** Lad  $U$  være en delmængde af  $V$ . Hvis hyperplanerne i  $U$  har lineært uafhængige normalvektorer, findes der en sektion  $A$  med  $V_A = U$ .

*Bevis.* Hvis  $U = \emptyset$  vælger vi blot den sektion der indeholder  $O$ . Antag fra nu af at  $U \neq \emptyset$ .

Da hyperplanerne i  $U$  har lineært uafhængige normalvektorer er  $L = \bigcap_{H \in U} H$  ikke-tom. Sæt  $m = m(L)$ ; per Lemma 5 er  $m$

## Læser du ikke normeret? UD!

– Regeringen og KU svinger pisken med såkaldt studiefremdriftsreform.

Søren Wengel Mogensen

Tidligere på året blev SU-reformen vedtaget trods protester fra landets studerende. Nu skal KU til at tage beslutning om, hvordan reformen konkret skal implementeres. En særlig del af SU-reformen har fået meget negativ opmærksomhed fra de studerende, nemlig studiefremdriftsreformen. Den handler om at få de studerende hurtigere igennem de videregående uddannelser og ud på arbejdsmarkedet. Mange studerende frygter dog, at valget af midler til at opnå dette kan betyde, at flere studerende bliver smidt ud af universitetet.

### Lykke Friis vs. de studerende

Den 14. november 2013 var der møde i Københavns Universitets Uddannelsesstrategiske Råd (KUUR) om netop implementeringen af reformen. KUUR havde til opgave at give en indstilling til KU's ledelse omkring implementeringen af reformen. Ved mødet var små hundrede studerende mødt op for at vise deres bekymring omkring problematikken og for at støtte de fire studenterrepræsentanter i KUUR. Dermed blev luften i det lille lokale hurtig lummer, og det var klart, at studenterrepræsentanterne ikke ville tilslutte sig det øvrige KUUR's forslag til en indstilling. Prorektor for uddannelse, Lykke Friis, som står i spidsen for KUUR, hævdede, at KU ville give de studerende bedre vilkår end reformen lagde op til, og at det altså kun var regeringen, og ikke KU, som de studerende kunne rette deres vrede mod. Det mente studenterrepræsentanter ikke var tilfældet, da KU også på nogle punkter yderligere strammer de krav, som reformen tvinger KU til at gennemføre.

## Normeret tid eller ingen tid

Sagens kerne er, at regeringen (og hele forligskredsen bag reformen, dvs. alle Folketingspartier med undtagelse af Enhedslisten) vil have de studerende hurtigere igennem studiet. Derfor indføres der pr. 1. juli 2014 en pligt for universiteterne om at tilmelde alle studerende kurser til en værdi af 60 ECTS-point hvert år. Man vil altså blive tvunget til at tilmelde sig kurser svarende til et normeret studie, og det uanset om man i det foregående år har dumpet kurser. Framelding vil ikke være tilladt. Det vil åbenlyst give vanskeligheder for mange studerende, hvorfor Studenterrådet har stort fokus på netop denne proces. Denne regel er dog et lovkrav, og derfor kan KU ikke ændre den på egen hånd.

Dervedover vil KU på eget initiativ indføre et krav om, at hver studerende består 45 ECTS pr. år. Hvis dette krav ikke overholdes, vil det medføre udskrivelse af den studerende fra universitetet, medmindre der opnås en dispensation. Studenterrepræsentanterne betragtede dette KU-tiltag som overflødigt og problematisk for de studerende.

Endelig vil KU ændre reglerne for orlov, så det fremover kun vil være muligt at tage seks måneders ubegrundet orlov på bachelordelen. På kandidatdelen vil det ikke være muligt at tage orlov. Denne ekstra skærpselse i forhold til regeringens udspil faldt også studenterrepræsentanterne for brystet. Imidlertid argumenterede adskillige af KU's ansatte på mødet for, at dette er nødvendigt, da KU ellers skal betale for de studerendes orlov. Det skal forstås på den måde, at hvis KU opfylder visse krav om en reduktion af den gennemsnitlige gennemførelsestid, så vil de få en bonusbetaling. Når gennemførelsestiden opgøres tæller orlov dog med, hvilket betyder, at KU rammes på pengepungen, når studerende tager orlov.

FAMØS november 2013

punkt på linjestykket. Men dette er umuligt, da restriktionen af  $d$  til en linje ikke har noget lokalt maksimum.  $\square$

Vi vil anvende Lemma 3 på afslutningerne af sektionerne i  $\mathbb{R}^n$  og på affine delrum af  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 4** Når  $A$  er et affint delrum af  $\mathbb{R}^n$ , er  $m(A)$  det unikke punkt på  $A$  med den egenskab at normalrummet til  $A$  i  $m(A)$  indeholder  $O$ .

*Bewis.* Pythagoras.  $\square$

**Lemma 5** Lad  $H_1, \dots, H_k$  være hyperplaner i  $V$  med  $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$ . Da er  $m(\bigcap_{i=1}^k H_i)$  ikke indeholdt i andre hyperplaner i  $V$  end  $H_1, \dots, H_k$ .

*Bewis.* Antag at  $m = m(\bigcap_{i=1}^k H_i)$  også er indeholdt i  $H \in V$ . Per Lemma 4 er  $O$  indeholdt i normalrummet til  $\bigcap_{i=1}^k H_i$  i  $m$ , så vektoren fra  $m$  til  $O$  er en linearkombination af normalvektorerne for  $H_1, \dots, H_k$ . Da er  $O$  indeholdt i den hyperplan som fås ved at udvide  $H \cap (\bigcap_{i=1}^k H_i)$  med normalvektorerne for  $H_1, \dots, H_k$ , hvilket er i modstrid med vores valg af  $O$ .  $\square$

**Definition 6** For hver sektion  $A$  af  $\mathbb{R}^n$  defineres  $V_A$  til at være mængden af hyperplaner i  $V$  der indeholder  $m(A)$ .

**Lemma 7** For enhver sektion  $A$  er  $m(\overline{A}) = m(\bigcap_{H \in V_A} H)$ .

*Bewis.* Per definitionen af  $V_A$  ligger  $m(\overline{A})$  i  $L = \bigcap_{H \in V_A} H$ , og der findes en omegn omkring  $m(\overline{A})$  i  $L$  der ikke skærer andre hyperplaner end dem i  $V_A$ . Hele denne omegn er derfor indeholdt

*Bevis.* Lad  $H_1, \dots, H_k$  være de hyperplaner der indeholder  $y$ ; som før vælges normalvektorerne for disse til at være de første  $k$  enhedsvektorer og  $y$  vælges til at være origo. Ved eventuelt at skifte fortegn på nogle af koordinaterne kan vi antage at  $A$  er sektionen  $x_i > 0$  for  $1 \leq i \leq k$ . Da  $B \neq A$  findes der et  $i$  så  $x_i < 0$  for  $x \in B$ ; ved at permutere koordinaterne kan vi antage at dette  $i$  er lig  $k$ . Lad nu  $L = \bigcap_{i=1}^{k-1} H_i$ ; en omegn omkring  $y$  i  $L$  består så af punkter hvor  $x_i = 0$  for  $1 \leq i \leq k-1$ . For disse punkter gælder at hvis  $x_k \geq 0$  er de indeholdt i  $\overline{A}$ , og hvis  $x_k \leq 0$  er de indeholdt i  $\overline{B}$ .  $\square$

Lad nu  $W$  bestå af alle hyperplaner i  $V$  samt for enhver delmængde  $\{H_1, \dots, H_k\}$  af  $V$  med  $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$  de hyperplaner der fremkommer ved at udvide  $\bigcap_{i=1}^k H_i$  med  $k-1$  af normalvektorerne for  $H_1, \dots, H_k$ . Lad  $O$  være et vilkårligt punkt der ikke ligger i nogle af hyperplanerne i  $W$ , og definer funktionen  $d$  på  $\mathbb{R}^n$  ved at  $d(x)$  er afstanden fra  $x$  til  $O$ .

**Lemma 3** *Lad  $A$  være en lukket og konveks delmængde af  $\mathbb{R}^n$ . Da har  $d$  et globalt minimumspunkt  $m(A)$  på  $A$ , og dette punkt er det eneste lokale minimumspunkt for  $d$  på  $A$ .*

*Bevis.* Lad  $K$  være en lukket kugle omkring  $O$  som indeholder et punkt i  $A$ . Da er  $A \cap K$  kompakt, så  $d(A \cap K)$  er en kompakt delmængde af  $\mathbb{R}^+$  og har dermed et mindste element. Altså har  $d$  et minimumspunkt  $x$  på  $A$ . Antag nu at der findes et andet lokalt minimum  $y$ . Da  $A$  er konveks er linjestykket fra  $y$  til  $x$  indeholdt i  $A$ ; betragt restriktionen af  $d$  til dette linjestykke. Da både  $y$  og  $x$  er lokale minima, er  $d$  svagt voksende omkring  $y$  og svagt aftagende omkring  $x$ , så  $d$  har et lokalt maksimum i et indre

## Op på barrikaderne

På mødet var der studerende fra alle fakulteter til stede, og stemningen blandt dem var klart, at der skulle gøres noget for at øve indflydelse på processen. Da KUUR kum er et rådgivende organ, vil der først på et KU-ledelsesmøde den 27. november blive truffet beslutning om, hvordan reformen skal implementeres.

Studenterrådet med flere har allerede varslet stormøder på fakulteterne for at få så mange studerende som muligt i tale og ydermere for at informere om de risici, som hver enkelt studerende vil stå overfor. På SCIENCE vil der blive afholdt stormøde d. 21. november kl. 17.30 i auditorium 3 på HCØ.

$v_1, \dots, v_{k-1}$  til at være de første  $k-1$  basisvektorer; ydermere foretager vi en parallelforskydning der placerer et punkt i  $\bigcap_{i=1}^k H_i$  i origo. Da har  $H_i$  ligningen  $x_i = 0$  for  $1 \leq i \leq k-1$ , mens  $H_k$  har ligningen  $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i = 0$  for nogle reelle tal  $m_i$ . Vi skifter nu fortegn på de  $x_i$  for hvilke  $m_i$  er negativ; herefter er  $m_i \geq 0$  for alle  $i$ .

Hyperplanerne  $H_1, \dots, H_{k-1}$  opdeler nu  $\mathbb{R}^n$  i  $2^{k-1}$  sektioner, bestemt af fortegnene på de første  $k-1$  koordinater af  $x$ . Sektionen med  $x_i > 0$  for  $1 \leq i \leq k-1$  skæres ikke af  $H_k$ , for i denne sektion er  $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i > 0$  for alle punkter. Men hvis vi parallelforskyder  $H_k$  til hyperplanen med ligningen  $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i = \varepsilon$  for et vilkårligt  $\varepsilon > 0$ , så vil der findes punkter med  $x_i > 0$  for  $1 \leq i \leq k-1$  men  $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i < \varepsilon$ . Der er dermed skabt en ny sektion. Da der kun er endeligt mange sektioner, kan vi sikre os at ingen sektioner forsvinder ved denne flytning ved blot at vælge  $\varepsilon$  tilstrækkelig lille.

Bemærk desuden at vi også kunne have flyttet  $H_k$  den anden vej, og derved opdelt sektionen med  $x_i < 0$  for  $1 \leq i \leq k-1$ .  $\square$

Vi kan derfor fra nu af antage at hvis en mængde af hyperplaner i  $V$  har ikke-tom fællesmængde, så er deres normalvektorer lineært uafhængige. Dette betyder specielt at fællesmængden af  $k$  hyperplaner i  $V$  enten er tom eller et  $(n-k)$ -dimensionelt affint delrum.

Vi får også brug for følgende observation:

**Lemma 2** *Lad  $y$  være et punkt beliggende på netop  $k$  hyperplaner i  $V$ , og lad  $A$  og  $B$  være to forskellige regioner der støder op til  $y$ . Da er det muligt at vælge  $k-1$  hyperplaner i  $V$  indeholdende  $y$  således at der findes en omegn om  $y$  i fællesmængden af disse hyperplaner hvor alle punkter er indeholdt i enten  $\bar{A}$  eller  $\bar{B}$ .*

*Denne side er tom.*



## Løsning af præmie- og ekstraopgave

– 23. årgang, nr. 1

*Martin Wedel Jacobsen*

Både præmieopgaven og ekstraopgaven er specialtilfælde af en mere generel opgave: Hvor mange stykker kan en  $n$ -dimensionel kugle deles op i med  $s$  snit? Præmieopgaven er tilfældet  $n = 2$ , ekstraopgaven er tilfældet  $n = 3$ . Ved at løse denne mere generelle opgave får man altså håndteret begge opgaver på en gang.

Først bemærker vi at vi lige så vel kan se på opdelinger af hele det  $n$ -dimensionelle rum: En opdeling af kuglen giver selvfølgelig en opdeling af rummet med mindst lige så mange stykker, mens en opdeling af rummet giver en opdeling af kuglen med lige så mange stykker ved at vælge et punkt i hvert stykke og placere kuglen så den indeholder alle disse punkter. Vi kan derfor se bort fra kuglen.

Vi ser altså på denne situation: Vi har en mængde  $V$  bestående af  $s$  hyperplaner i  $\mathbb{R}^n$  som opdeler  $\mathbb{R}^n$  i et antal sektioner, og vi ønsker at bestemme det maksimale mulige antal sektioner. Vi vil gøre dette ved at tildele hver sektion en delmængde af  $V$  og tælle disse delmængder i stedet.

**Lemma 1** *Antag at  $V$  indeholder et antal hyperplaner som har ikke-tom fællesmængde og hvis normalvektorer ikke er lineært uafhængige. Da kan antallet af sektioner forøges ved at parallelforskyde en af hyperplanerne.*

*Bevis.* Antag at der findes et sådant system af hyperplaner i  $V$ ; udvælg blandt disse  $k$  hyperplaner  $H_1, \dots, H_k \in V$  med normalvektorer  $v_1, \dots, v_k$  således at  $v_1, \dots, v_{k-1}$  er lineært uafhængige mens  $v_1, \dots, v_k$  ikke er det. Vi foretager et basisskift ved at vælge

## Sylvesters kriterium

– Nej, ikke mit kriterium

*Rasmus Sylvesters Bryder*

Inspireret af en statistikers manglende råd om hvornår en kvadratisk matrix er positivt definit uden at skulle ud i at bestemme dens egenverdier, ledte jeg efter en betingelse for, at en matrix har denne egenskab, der kunne være nem at vise i praksis. Jeg skulle ikke lede længe efter et: Sylvesters kriterium, som vises sidst i denne artikel, er et tilpas simpelt og samtidigt overraskende resultat (kort sagt, det kilder en lille smule, når man læser det). For at komme frem til sætningen vil vi undervejs bevæge os forbi en række virkelig interessante sætninger om komplekse matrixer, som jeg ikke selv har set før forarbejdet til denne artikel, og forhåbentlig vil man kunne drage nytte af disse. For at alle kan følge med, har jeg sørget for, at jeg kun bevæger mig inden for territoriet trådt under LinAlg-kurset, og jeg vil henvise til alles førsteårs-LinAlg-bog [2] i det følgende i form af sætningsangivelser sat i parenteser.

Først noget notation. Vi definerer  $\mathbb{M}_{m,n}$  som værende vektorrummet af  $m \times n$ -matrixer med indgange i  $\mathbb{C}$ .  $\mathbb{M}_n$  betegner rummet  $\mathbb{M}_{n,n}$ , og  $I_n \in \mathbb{M}_n$  betegner enhedsmatricen (bestående af ettal-ler i diagonalen og nuller alle andre steder). For enhver matrix  $A = (a_{ij})$  i  $\mathbb{M}_{m,n}$  (forstået på den måde, at  $a_{ij}$  er indgangen i skæringen mellem  $i$ 'te række og  $j$ 'te søjle) defineres den *adjungerede* matrix  $A^* = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,m}$  ved  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ; for eksempel vil vi have for

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \\ 4 & 2 + 3i \end{pmatrix},$$

at dens adjungerede er givet ved

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix}.$$

Regnerregler for adjungering er såre simple og ganske vigtige: der gælder, at

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \bar{\lambda}A_1^* + \bar{\mu}A_2^*, \quad (A^*)^* = A$$

for alle  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{n,m}$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,p}$  og  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . En kompleks  $n \times n$ -matrix  $A$  kaldes *selvadjungeret* eller *hermitisk* hvis  $A^* = A$ .

I tilfælde af, at nogen har glemt et ekstremt relevant koncept fra LinAlg, bliver det kort genopfrisket her: ved en *eigenvektor* for en matrix  $A \in \mathbb{M}_n$  forstås en vektor  $x \in \mathbb{C}^n$ , så  $x$  ikke er nulvektoren, og  $Ax = \lambda x$  for et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  $\lambda$  kaldes i dette fald den til  $x$  hørende *eigen værdi* for  $A$ .  $A$  kaldes *diagonaliserbar*, hvis der findes en basis for  $\mathbb{C}^n$  bestående af egenvektorer for  $A$ . Et centralt og ganske uomstændigt resultat fra lineær algebra lyder, at egen værdierne for  $A$  netop er rødderne til det såkaldte karakteristiske polynomium defineret ved  $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$  (6.1.8), så ved Algebras Fundamentalsætning har enhver kompleks matrix  $A$  i alt  $n$  egen værdier talt med multiplicitet (summa summorum: de behøver ikke at være forskellige).

I det følgende opfattes enhver vektor  $x \in \mathbb{C}^n$  endvidere automatisk som en  $n \times 1$ -matrix og enhver  $1 \times 1$ -matrix som et komplekst tal. Vi definerer et indre produkt på  $\mathbb{C}^n$  ved

$$\langle x, y \rangle = y^*x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

på dems led:

2	4	7	11	16	22
V	V	V	V	V	V
2	3	4	5	6	
V	V	V	V	V	
1	1	1	1	1	

Vi har nu to differensfølger. En lineær følge vil have en konstant differensfølge (da en linje har konstant hældning). Ved at betragte de tre følger (hvoraf den sidste er konstant) kan man tænke, at vores oprindelige følge af maksimale antal pizzastykker må være på formen

$$S(n) = An^2 + Bn + C$$

Idet den midterste må være en lineær differensfølge. Ved at udnytte, at  $S(1) = 2$ ,  $S(2) = 4$ ,  $S(3) = 7$  fås nu følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 4A + 2B + C &= 4 \\ 9A + 3B + C &= 7 \end{aligned}$$

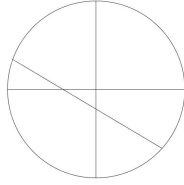
Vi løser ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 9R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det fremgår heraf, at  $C = 1$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $A = \frac{1}{2}$  og altså bliver antallet af stykker pizza som funktion af antal smt

$$S(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

behøver de ikke gå igennem midten. Det næste snit vil vi lægge, så vi skærer samtlige tidligere snit over. Med denne taktik får vi som før  $S(1) = 2$ ,  $S(2) = 4$ , men ved det tredje snit kan vi rent faktisk få syv stykker pizza:



Hvis man vil, kan man fortsætte lidt endnu. Da finder man let  $S(4) = 11$ ,  $S(5) = 16$ ,  $S(6) = 22 \dots$

Da vi med denne taktik altid skærer alle tidligere snit over, vil det være den optimale taktik til at få flest stykker pizza ved  $n$  skæringer. Dette kan altid lade sig gøre, da vi blot kan lægge vores snit, så de ikke er parallelle samt at der aldrig er mere end to linjer, der skærer hinanden i et givet punkt. Det er klart, at vi altid vil kunne snitte, så intet snit er parallelt. Hvis der ikke findes et snit inden for pizzaen, så ikke mere end to snit skærer hinanden i et punkt, kan vi blot placere det uden for pizzaen og skalere snittene ned (eller pizzaen op). På denne måde vil vi altid udskære det maksimale antal stykker.

Betragt nu følgen af størst mulige antal stykker pizza ordnet efter antal snit samt følgen af differensen på hvert led og differensen

for vektorer  $x = (x_1, \dots, x_n)$  og  $y = (y_1, \dots, y_n)$  med komplekse indgange.<sup>1</sup>

**Lemma 1** *Alle egenverdier for en selvadjungeret matrix  $A$  er reelle.*

*Bevis.* Antag, at  $\lambda$  er en egenværdi for  $A$  med en tilhørende egenvektor  $x$ . Da vil

$$\begin{aligned} \lambda \|x\|^2 &= \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \\ &= x^* Ax = x^* A^* x = (Ax)^* x \\ &= \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|x\|^2, \end{aligned}$$

så  $\lambda = \bar{\lambda}$ ; altså vil  $\lambda \in \mathbb{R}$ . □

Nu til det vigtige.

**Definition 2** En matrix  $U \in \mathbb{M}_n$  kaldes *unitær*, hvis  $U^*U = UU^* = I_n$ .

Vi husker, at en  $n \times n$ -matrix er unitær, hvis og kun hvis dens søjler udgør en ortonormalbasis i  $\mathbb{C}^n$  jf. (7.2.3); vi kommer til at bruge dette en masse i det følgende. Vi starter først med en ordentlig moppedreng.

**Sætning 3** (Schurs triangulariseringsætning, 1909) *For hver kompleks matrix  $A \in \mathbb{M}_n$  findes en unitær matrix  $U \in \mathbb{M}_n$  således at  $U^*AU$  er en øvre trekantsmatrix.*

<sup>1</sup>Nogle studerende er måske mere vant til notationen  $x \cdot y$  frem for  $\langle x, y \rangle$ . Under alle omstændigheder gælder regnereglerne (7.1.1) selvfølgelig stadig.

*Bewis.* Vi viser dette ved induktion efter  $n$ ; i tilfældet  $n = 1$  er der intet at vise (sæt  $U = I_1$ ). Antag derfor, at sætningen gælder for komplekse  $n \times n$ -matricer; vi viser ud fra dette, at sætningen holder for  $(n + 1) \times (n + 1)$ -matricer. Lad derfor  $A \in \mathbb{M}_{n+1}$ , og lad  $\lambda$  være en egen værdi for  $A$  med en tilhørende egenvektor  $x \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Da vil

$$x_1 = \frac{1}{\|x\|} x$$

også være en egenvektor for  $A$  hørende til  $\lambda$ . Mængden  $\{x_1\}$  kan nu udvides til en basis  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  for  $\mathbb{C}^{n+1}$  jf. (4.5.12) og ved Gram-Schmidt-ortogonalisering (7.1.8) opnås en ortonormalbasis  $\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$  for  $\mathbb{C}^{n+1}$ , hvor  $z_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = x_1$ . Lades  $U$  være matricen givet ved

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

altså med søjle  $i$  lig vektoren  $z_i$ , vil  $U$  dermed være unitær. Den første søjle i matricen  $U^*AU$  er nu produktet  $U^*AUe_1$  jf. (1.3.5), hvor  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Bemærk, at  $U^{-1} = U^*$ , hvormed  $Ue_1 = z_1 = x_1$  og  $U^{-1}z_1 = e_1$ , således at

$$U^*AUe_1 = U^*A(Ue_1) = U^*Ax_1 = U^*(\lambda x_1) = \lambda(U^{-1}x_1) = \lambda e_1,$$

hvor vi brugte, at  $x_1$  var egenvektor for  $A$ . Altså vil

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix},$$

hvor  $B$  er en  $1 \times n$ -matrix,  $0_{n,1}$  er en  $n \times 1$ -matrix med nul overalt og  $A_1$  er en  $n \times n$ -matrix (vi har skrevet  $U^*AU$  som en *blokmatrix*). Ved induktionsantagelsen findes en unitær matrix

## Løsning på præmieopgave – 23. årgang, nr.1

*Anders Druedahl og Martin Andersen*

Denne artikel er en besvarelse af følgende opgave:

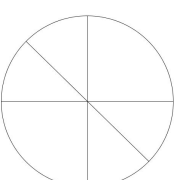
*"Lad  $n \in \mathbb{N}$ . En pizzakniv trækkes igennem en pizza  $n$  gange.*

*Hvad er det maksimale antal stykker, pizzaen kan skæres op i?"*

Vi gør os først følgende observationer:

- Den første skæring vil altid efterlade os med to stykker pizza.
- Et nyt stykke pizza fremkommer ved at en skæring rammer et stykke pizza.
- At en skæring rammer  $k$  stykker pizza er ækvivalent med at en skæring rammer tidligere skæringer i  $k - 1$  forskellige punkter.

Antag pizzaen er konveks, som vi kender den. Vi starter med at bemærke, at hvis pizzaen skæres igennem midten vil vi altid få det dobbelte antal stykker som overskæringer, altså bliver antal stykker pizza som funktion af antallet af snit  $s(n) = 2n$  for  $n \in \mathbb{N}$ . Her ses et eksempel  $s(3) = 2 \cdot 3$ :



Den anden mulighed, som ikke giver så pæne stykker (men et stort antal stykker), er at prøve at skære så mange tidligere snit over som muligt uden at skære igennem tidligere skæringer. De to første snit vil være de samme som i tilfældet ovenover, dog

*hele kassebeholdningen på digitalvægten. Du aflæser: 1084, 247 gram. (afrundet) Hvor mange mønter er falske?*<sup>7</sup>

Svar bedes indsendt til famos@math.ku.dk senest ved fristens udløb.

### Hædning af sidste præmieopgaves banemænd (23. årgang nr. 1)

Tusind tak til William Kurdahl, Thor Kampmann og duoen Anders Druedahl og Martin Andersen for at have svaret korrekt på præmieopgaven! Der vanker en præmie til Anders og Martin, hvis besvarelse følger sidst i bladet.

Også mange tak til Martin Wedel Jacobsen og Sune Precht Reeh for deres flotte og meget forskellige besvarelser af præmie- og ekstraopgaven. En af disse besvarelser kan læses i bladet, mens begge kan læses på vores hjemmeside..

Idet Thor Kampmann for fjerde gang i træk har svaret korrekt på ekstraopgaven, kan han nu vælge at få sit ansigt printet på forsiden af næste udgave af FAMØS.

<sup>7</sup> Bemærk, at besvarelse af denne opgave ikke udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne offentliggjort i næste FAMØS-blad i den rækkefølge, vi modtager jeres svar! Enhver af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden følgende opgaver, kan vælge at få trykt sit ansigt på forsiden af FAMØS.

$U_1 \in \mathbb{M}_n$  så  $U_1^* A_1 U_1$  er en øvre trekantsmatrix med diagonalen bestående af egenverdier for  $A'$ . Bemærk, at blokmatrixen

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & U_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}$$

er unitær: dens søjlevektorer har alle længde 1 og er indbyrdes ortogonale, hvorpå de tilmed er lineært uafhængige jf. (7.1.6) og derfor udgør en basis for  $\mathbb{C}^{n+1}$  jf. (4.5.7). Bemærk endvidere, at

$$\begin{aligned} (UU')^* C(UU') &= (U')^* (U^* C U) U' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & U_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & B' \\ 0_{n,1} & U_1^* A_1 U_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

hvor  $B'$  er en  $1 \times n$ -matrix<sup>2</sup>. Eftersom  $U_1^* A_1 U_1$  er en øvre trekantsmatrix fra induktionsantagelsen, fås at sidst forekommende matrix i ovenstående udregninger også er en øvre trekantsmatrix. Da  $UU'$  er unitær (tjek selv!), fås det ønskede for  $(n+1) \times (n+1)$ -matricer, så induktion giver, at sætningen holder for alle  $n$ .  $\square$

Bemærk, at ovenstående sætning ikke nødvendigvis for reelle matricer  $A$  atter giver en reel unitær matrix  $U$ .

**Korollar 4** For  $A \in \mathbb{M}_n$  er determinanten af  $A$  lig produktet af de  $n$  egenverdier for  $A$ .

<sup>2</sup> Her anbefales det at bruge et par minutter på at overbevise sig om, hvorledes blokmatrixer af denne form ganges sammen og hvorfor vi får det ovenstående.

*Bevis.* Tag jf. ovenstående sætning en unitær matrix  $U$  således at  $T = U^*AU$  er en øvre trekantsmatrix. Da er

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(U^*(A - \lambda I_n)U) = \det(T - \lambda I_n)$$

for alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , således at egenværdierne for  $A$  netop er egenværdierne for  $T$ . Lades  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  være diagonalelementerne i  $T$ , ses hurtigt, at

$$\det(T - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

da  $T$  er en øvre trekantsmatrix. Altså er egenværdierne for  $T$  lig diagonalelementerne i  $T$ . Da

$$\det(A) = \det(UTU^*) = \det(T) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

følger det ønskede.  $\square$

**Korollar 5** *For enhver selvadjungeret matrix  $A \in \mathbb{M}_n$  findes en ortonormalbasis af egenvektorer for  $A$ , og egenværdierne knyttet til de  $n$  egenvektorer er netop de  $n$  egenværdier for  $A$ . Hermed er  $A$  diagonaliserbar.*

*Bevis.* Lad  $U \in \mathbb{M}_n$  være en unitær matrix, således at  $U^*AU$  er en øvre trekantsmatrix jf. Schurs triangulariserings sætning. Da

$$(U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U = U^*AU,$$

er  $U^*AU$  også en nedre trekantsmatrix, idet den er lig  $(U^*AU)^*$ , hvormed  $U^*AU$  er en diagonalmatrix  $D \in \mathbb{M}_n$ . Søjlevektorerne i  $U$  udgør en ortonormalbasis for  $\mathbb{C}^n$ , da  $U$  er unitær. Lad  $z_i$  være den  $i$ 'te søjlevektor i  $U$ . Da vil  $Ue_i = z_i$ , hvor  $e_i$  er den  $i$ 'te

## Spareråd til studerende: Bliv

### falskmøntner

– Men pas på: du bliver let afsløret...

#### Blokkens præmieopgave (23. årgang nr. 2)

*Du har brug for en pakke smøger og betaler med 8 mønter, hvoraf netop én er falsk og dermed vejer mindre end en ægte mønt. Kantinedamen fatter mistanke om, at den ene mønt er falsk. Hun har en vægt med to skåle, som kan vise hende, hvilken skål har det tungeste indhold.*

*Kan kantinedamen finde den falske mønt ved at veje kun to gange?*

*Kunne hun gøre det samme, hvis smøgerne havde kostet hhv. 9 eller 10 mønter?*

(Ovenstående opgave er fra en ydre kilde.)

Blandt de korrekte besvarelser med dertil følgende bevis udtrækkes en vinder. Præmien lyder på et gavekort på 100 kr til GAMES eller en autentisk GBP<sup>6</sup> efter vinderens frie valg.

#### Blokkens ekstraopgave (23. årgang nr. 2)

*Du har nu fået dig et studiejob i kantinen. I mellemtiden er de andre studerende blevet mere udspikulerede, så et vilkårligt antal af deres mønter er falske. En falsk mønt vejer 22/7 gram, og en ægte vejer  $\pi$  gram.*

*Først efter en hel time i kassen kommer du i tanker om, at der er falske mønter i omløb. Du skal nu bestemme, hvor meget af kassebeholdningen udgøres af falske mønter. Du smider derfor*

<sup>6</sup>Ginger Beer Plant.

basisvektor i  $\mathbb{C}^n$  (1.3.5). Betegnes det  $i$ 'te diagonalelement i  $D$  med  $\lambda_i$ , fås nu

$$A z_i = A U e_i = U(U^* A U e_i) = U(D e_i) = U(\lambda_i e_i) = \lambda_i(U e_i) = \lambda_i z_i.$$

Altså er den  $i$ 'te søjlevektor i  $U$  en egenvektor for  $A$  med tilhørende egenværdi lig det  $i$ 'te diagonalelement i  $D$ . Ved beviset for Korollar 4 indses, at egenværdierne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  netop udgør alle egenværdier for  $A$ .  $\square$

$V_1$  nærmer os nu det ønskede kriterium så småt. Først skal bemærkes, at hvis  $W_1$  og  $W_2$  er underrum af et vektorrum  $V$ , da er  $W_1 \cap W_2$  og

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

også underrum af  $V$ . Hvis  $V_1$  og  $V_2$  er vektorrum, opnås et nyt vektorrum ved at betragte produktmængden

$$V_1 \times V_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

og definere addition og skalarmultiplikation på denne koordinatvist, altså ved

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) := (\lambda x_1, \lambda y_2)$$

for  $x_1, x_2 \in V_1, y_1, y_2 \in V_2$  og  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dette vektorrum kaldes den direkte sum af  $V_1$  og  $V_2$  og betegnes  $V_1 \oplus V_2$ . Det er endvidere let at indse, at hvis  $\{x_1, \dots, x_m\}$  er en basis for  $V_1$  og  $\{y_1, \dots, y_n\}$  er en basis for  $V_2$ , opnås en basis for  $V_1 \oplus V_2$  ved vektorsættet

$$\{(x_1, 0), \dots, (x_m, 0), (0, y_1), \dots, (0, y_n)\}.$$

Altså er  $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ . Ud fra disse konstruktioner kan vi udlede følgende meget vigtige formel som konsekvens af Dimensionsætningen.

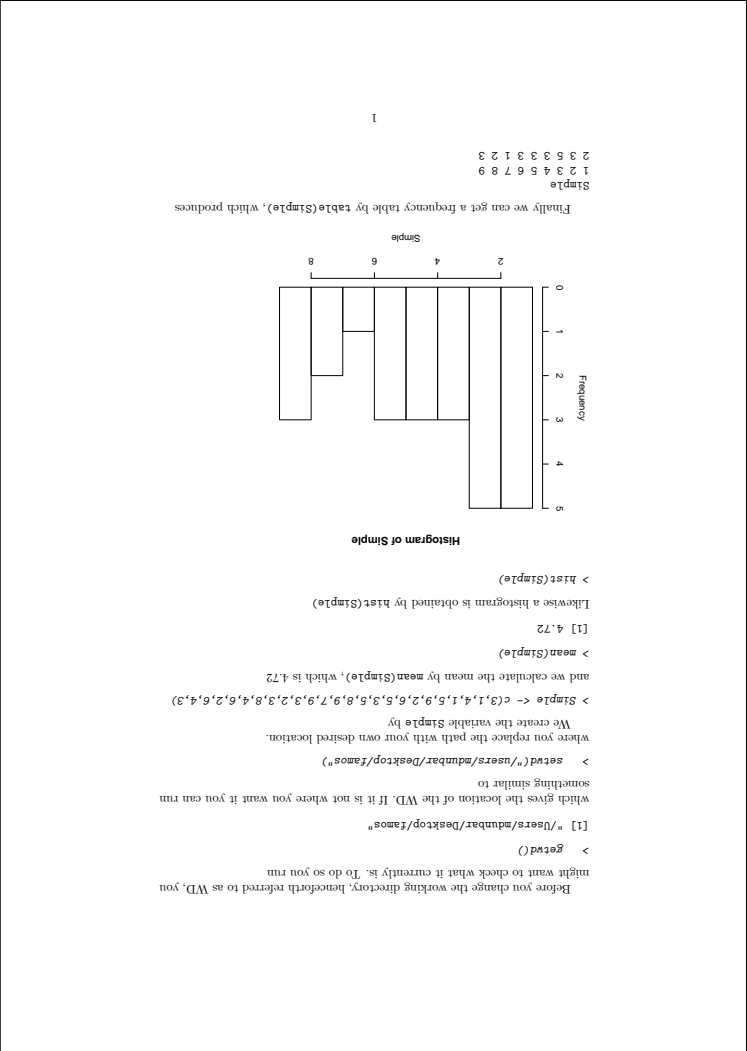
23. årgang, nr. 2

```

If we want it in RPK format we use the R package xtable instead
> install.packages("xtable")
The downloaded binary packages are in
/var/folders/r_/s3t1mp196f17e94r3m840v0000gn/T/RtmpfHfHYLE/downloaded.packages
> library(xtable)
> xtable(table(Sample))

```

Sample
1
3
3
3
4
3
3
7
8
9



**Lemma 6** (Grassmanns formel) *Lad  $W_1$  og  $W_2$  være underrum af et endeligdimensionalt vektorrum  $V$ . Da vil*

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

*Bewis.* Definer en lineær afbildning  $f: W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_1 + W_2$  ved  $f(x, y) = x + y$ .  $f$  er surjektiv. Hvis  $f(x, y) = 0$  for en vektor  $(x, y) \in W_1 \oplus W_2$ , vil  $x + y = 0$  og dermed  $y = -x$  i  $V$ . Endvidere vil  $x \in W_1$  og  $x = -y \in W_2$ , så  $x \in W_1 \cap W_2$ . Dermed vil

$$\ker f \subseteq \{(x, -x) \mid x \in W_1 \cap W_2\}.$$

Omvendt ses, at  $f(x, -x) = 0$  for alle  $x \in W_1 \cap W_2$ , så kernen er lig ovenstående mængde.

ker  $f$  er et underrum af  $W_1 \oplus W_2$ . Defineres nu en afbildning  $g: \ker f \rightarrow W_1 \cap W_2$  ved  $g(x, y) = x$ , er det let at vise, at  $g$  er lineær og en isomorfi. Altså er  $\dim \ker f = \dim(W_1 \cap W_2)$ , hvormed vi ved Dimensionsætningen (4.7.7) får

$$\begin{aligned} \dim W_1 + \dim W_2 &= \dim(W_1 \oplus W_2) \\ &= \dim(f(W_1 \oplus W_2)) + \dim(\ker f) \\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2), \end{aligned}$$

og dermed det ønskede.  $\square$

Nu er vi beredte og bevæbnede til tænderne med en kavalkade af evergreens inden for sætninger om matricer. Tally-ho!

**Definition 7** En matrix  $A \in \mathbb{M}_n$  er *positivt definit*, hvis  $x^* Ax > 0$  for alle  $x \in \mathbb{C}^n$ , hvor  $x$  ikke er nulvektoren.

**Lemma 8** En selvadjungeret matrix  $A \in \mathbb{M}_n$  er *positivt definit*, hvis og kun hvis alle dens egenverdier er strengt positive. Specielt er determinanten af  $A$  positiv, hvis  $A$  er positivt definit.

not the R code, you use the `echo=` option. What happens is `<<echo=true>>` will ensure that both the R code and the result is printed, while `<<echo=false>>` only produces the result. A combination of the two could then be something like:

```
<<echo=false, results=te<>
```

Producing only the result mid-sentence is done by inserting R code into `\Sexpr{}`.

### Happy sweating!

Now, if you have to run your entire analysis on a different dataset or have to run similar codes over and over again with miniscule differences, you have the tools and the opportunity to avoid abundant copy-pasting of your R code and figures into your `LaTeX` files. Isn't that just dandy?

### References

- [1] R FAQ - The Comprehensive R Archive Network, [cran.r-project.org/doc/FAQ/R-FAQ.html](http://cran.r-project.org/doc/FAQ/R-FAQ.html)
- [2] Friedrich Leisch, Sweave: Dynamic generation of statistical reports using iterative data analysis, *Computat 2002* - Proceedings in Computational Statistics, pp. 575-580. Physica Verlag



**Example 2** (Tables, plots and embedded R code) This time we might not want the R code to be its own paragraph. We add the following code to our .Rnw-file:

```

We create the variable \verb+Simple+ by
<<<>>=
Simple <- c(3,1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,7,9,3,2,3,
8,4,6,2,6,4,3)
@
and we calculate the mean by \verb+mean(Simple)+,
which is \Sexpr{mean(Simple)}
<<<>>=
mean(Simple)
@
Likewise a histogram is obtained by \verb+hist(Simple)+
<<<fig=true>>=
hist(Simple)
@

Finally we can get a frequency table by \verb+table(Simple)+,
which produces
<<<echo=false>>=
table(Simple)
@
If we want it in \LaTeX\ format we use the R package
\verb+xtable+ instead
<<<>>=
install.packages("xtable")
library(xtable)
@
<<results=tex>>=
xtable(table(Simple))
@

```

There is a option for figures given by `fig=`, `<<fig=true>>=`, informs Sweave that we would like to have the figure produced by the R code inserted into our .tex file. Another option concerns the look of the output. If the results should be formatted in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X you type `<<results=tex>>=` (the default option is `results=verbatim`). If you only want the results and

*Bevis.* Hvis  $A$  er positivt definit og  $\lambda$  er en egenværdi for  $A$  med en tilhørende egenvektor  $x$ , vil

$$0 < x^*Ax = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2,$$

hvormed vi ved division med  $\|x\|^2$  får, at  $\lambda > 0$ .

For at vise den anden implikation, bemærker vi, da  $A$  er selvadjungeret, at der findes en ortonormalbasis for  $A$  bestående af egenvektorer jf. Korollar 5. Lad  $\{z_1, \dots, z_n\}$  være en sådan, med den til  $z_i$  hørende egenværdi betegnet  $\lambda_i$ . For ethvert  $x \in \mathbb{C}^n$  findes da entydigt bestemte tal  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$  så  $x = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i$ , hvormed

$$\begin{aligned} x^*Ax &= \langle Ax, x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i z_i, \sum_{j=1}^n \mu_j z_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_i \overline{\mu_j} \langle z_i, z_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \overline{\mu_i} \langle z_i, z_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\mu_i|^2, \end{aligned}$$

da  $z_i$ 'erne er ortonormale. Hvis alle egenværdier er strengt positive og  $x$  er forskellig fra nulvektoren, må der være et  $j \in \{1, \dots, n\}$ , så  $\mu_j \neq 0$  hvormed  $x^*Ax \geq \lambda_j |\mu_j|^2 > 0$ . Altså er  $A$  positivt definit. Det sidste resultat følger af Korollar 4.  $\square$

Følgende pudsige begreber er essentielle for det næste (og sidste) resultat.

**Definition 9** Lad  $A \in \mathbb{M}_n$ . For  $k = 1, \dots, n$  kaldes den  $k \times k$ -matrix, der opnås ved at slette de sidste  $n - k$  rækker og søjler i  $A$ , for den  $k$ 'te ledende undermatrix af  $A$ . Den  $k$ 'te ledende underdeterminant af  $A$  er determinanten af den  $k$ 'te ledende undermatrix af  $A$ .

**Sætning 10 (Sylvesters kriterium)** Lad  $A \in \mathbb{M}_n$  være selvadjuengerel. Da er  $A$  positivt definit hvis og kun hvis dens ledende underdeterminanter er positive.

*Bevis.* Antag først, at  $A$  er positivt definit, lad  $k \in \{1, \dots, n\}$  og lad  $A_k$  være den  $k$ 'te ledende undermatrix af  $A$ . For enhver vektor  $x \in \mathbb{C}^k$  forskellig fra nulvektoren defineres  $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$  ved  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ , hvor  $x = (x_1, \dots, x_k)$ . Specielt er  $\tilde{x}$  ikke nulvektoren, og ved direkte udregning indses, at

$$x^* A_k x = \tilde{x}^* A \tilde{x} > 0,$$

således at  $A_k$  er positivt definit. Specielt fås ved Lemma 8, at determinanten af  $A_k$  er positiv og dermed fås den ene implikation.

Den anden retning vises ved induktion efter  $n$ , hvori starttilfældet  $n = 1$  er klart. Antag derfor, at det gælder for alle selvadjuengerede  $n \times n$ -matricer, at positivitet af de ledende underdeterminanter medfører, at matricen er positivt definit, og lad  $A$  være en selvadjuengeret  $(n + 1) \times (n + 1)$ -matrix med positive ledende underdeterminanter. Ved Lemma 8 ses, at det er nok at vise, at egenrødderne for  $A$  er positive. Grundet induktionsantagelsen vil den  $n$ 'te ledende undermatrix af  $A$  være positivt definit; kald denne for  $A_n$ . Eftersom  $A$  er selvadjuengeret, findes ved Korollar 5 en orthonormalbasis  $z_1, \dots, z_{n+1}$  af egenvektorer for  $A$  med tilhørende egenrødder  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ , som udgør alle egenrødder for  $A$ . Vi kan ved omarrangering sørge for, at  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n+1}$ , idet

dence goes at the beginning of a line. You save this chunk of code in your TeXeditor as an .Rnw-file, **not** a .tex-file.<sup>5</sup> This example is saved as famos.Rnw.

This is because any Sweave file goes through the following procedure: It is written as an .Rnw, which is then turned into a .tex, which in turn is compiled to .pdf.

In order to turn the .Rnw file to a .tex file you execute the following command in R:

```
Sweave("Famos.Rnw")
```

which produces something you can then compile from your TeXeditor or take the 'sweavecut', which is the following R code:

```
system("pdflatex famos.tex")
```

followed by

```
system("open famos.pdf")
```

to see if everything looks the way you would like it to.

Please note, you will probably have to move the Sweave.sty file from your R directory to your L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X files in order to compile the .tex-file. Alternatively you can do what I refer to as 'the FAMØS way' and put the style file in the same folder as the .tex-file.

## A sweave and a half

As R is used for more than just changing the working directory, here is another example:

<sup>5</sup>If this seems very scary you could also choose the option 'New R Sweave' in RStudio, which produces a .Rnw-file. This file can be compiled from RStudio by clicking the button 'Compile PDF'

part of this operation. Choice of such a programme is laced with personal preference and thus you are left to choose by your own accords. Alternatively go to one of the computer rooms and use T<sub>E</sub>Xworks<sup>4</sup>.

### Famous last sweaves

I feel it is easiest to illustrate Sweave by example, so I went with what is genuinely the simplest example I could think to do off the top of my head:

**Example 1 (WD)** Say you wanted to explain how to change the working directory, you could write something like

```
\documentclass[a4paper]{article}
\usepackage{Sweave}

\begin{document}
Before you change the working directory, henceforth
referred to as WD, you might want to check what it
currently is. To do so you run
<<>>=
getwd()
@
which gives the location of the WD. If it is not where
you want it you can run something similar to
<<>>=
setwd("/users/mdunbar/Desktop/famos")
@
where you replace the path with your own desired location.
\end{document}
```

As you may have been able to decipher, in our document R code and L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X code are preceded by <<...>>= resp. @. All such prece-

<sup>4</sup>The author is partial to using T<sub>E</sub>Xmaker with either MiK<sub>T</sub>TeX or Mac<sub>T</sub>TeX as the distributor and may or may not be able to help set up Sweave for one of these combinations

egenværdierne er reelle ved Korollar 4. Som i beviset for Lemma 8 har vi nu for ethvert  $x \in \mathbb{C}^{n+1}$  på formen  $x = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i z_i$ , at

$$x^* Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\mu_i|^2.$$

Bemærk, at  $\mu_i$ 'erne er entydigt bestemt ud fra  $x$ , eftersom  $z_i$ 'erne er en basis. Hvis  $x \in \text{span}\{z_1, z_2\}$ , vil vi i så fald have

$$\mu_3 = \dots = \mu_{n+1} = 0,$$

så

$$x^* Ax = \lambda_1 |\mu_1|^2 + \lambda_2 |\mu_2|^2 \leq \lambda_2 (|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2) = \lambda_2 \|x\|^2,$$

hvoraf sidste lighedstegn indses ved at regne på  $\langle x, x \rangle$  direkte.

Lad  $W$  være det underrum af vektorer i  $\mathbb{C}^{n+1}$ , hvis  $(n+1)$ 'te koordinat er lig 0. For enhver vektor  $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in W$  forskellig fra nulvektoren indses nu igen ved direkte udregning, at

$$x^* Ax = (x')^* A_n x' > 0,$$

hvor  $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , idet  $A_n$  er positivt definit. Eftersom  $\text{span}\{z_1, z_2\}$  har dimension 2,  $W$  har dimension  $n$  og de begge er indeholdt i vektorrummet  $\mathbb{C}^{n+1}$  af dimension  $n+1$ , må vi have

$$\dim(W \cap \text{span}\{z_1, z_2\}) > 0$$

og dermed  $W \cap \text{span}\{z_1, z_2\} \neq \{0\}$  ved Grassmanns formel. Der findes altså en vektor  $x \in W \cap \text{span}\{z_1, z_2\}$  forskellig fra nulvektoren, hvorved vi får

$$\lambda_2 \|x\|^2 \geq x^* Ax > 0$$

og dermed  $\lambda_{n+1} \geq \dots \geq \lambda_2 > 0$ . Efftersom

$$\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1} = \det A > 0,$$

må  $\lambda_1 > 0$ , så alle egenverdier for  $A$  er positive, hvormed  $A$  er positivt definit. Induktion giver nu den anden retning for alle  $n$ , og altså følger Sylvesters kriterium.  $\square$

## Litteratur

- [1] Kumaresan, S. *Sylvester Criterion for Positive Definiteness*, University of Hyderabad, Department of Mathematics and Statistics, 2004.
- [2] Pedersen, Niels Vigand. *Forelæsningsnoter til lineær algebra*, 2. udgave, Københavns Universitet, Matematisk Afdeling, 2009.
- [3] Prasolov, Viktor Vasil'evich. *Problems and theorems in linear algebra*, American Mathematical Society, 1994.

# Sweaving R and L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

*Maria Bekker-Nielsen Dunbar*

The main demographic of this student publication is based in the Department of Mathematical Sciences at UCPH, as such this article assumes familiarity with R and L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X and will attempt to introduce Sweave from that vantage point.

One of the first questions I ever considered regarding R is answered in the FAQ part of the R-project webpage:

*2.12 Why is R named R?*

The name is partly based on the (first) names of the first two R authors (Robert Gentleman and Ross Ihaka), and partly a play on the name of the Bell Labs language, S

You can now either continue to point [3.1](#)<sup>3</sup> *What is S?* in that same FAQ or take this at face value: S is the statistical programming language upon which R is based. The idea behind Sweave is to *weave* R (S) analyses with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X documents, hence the name Sweave which to the best of my knowledge is pronounced S-weave (that is /es-wi:v/ for the phonologically inclined).

## Baby's first sweaves

First things first – how to obtain this mystical Sweave creature: This part is painless and takes hardly any time; if you have R, you already have Sweave seeing as Sweave is part of R's `utils` (base) package. Next up, you will need a T<sub>E</sub>Xeditor for the L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

<sup>3</sup>At time of writing

Den højre side af lighedstegnet er oplagt endelig. Fra Lemma 10 (Borel-Cantelli) har vi for ethvert  $\delta > 0$ , at

$$P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\min\{Y_1, \dots, Y_k\} \geq w(x^*) + \delta\}) = 0,$$

eller ækvivalent hermed: for ethvert  $\delta > 0$ , så er

$$P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\min\{Y_1, \dots, Y_k\} < w(x^*) + \delta\}) = 1.$$

Heraf sluttet det ønskede resultat.  $\square$

## Litteratur

- [1] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- [2] Hammersley, J. M., & Handscomb, D. C., *Monte Carlo Methods*, Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics, London, 1964.
- [3] Hansen, E., *Measure Theory*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 4. udgave, 2009.
- [4] Jacobsen, M., *Videregående Sandsynlighedsregning*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 3. udgave, 2003.
- [5] Metropolis, N. & Ulam, S., *The Monte Carlo method*, J. Am. Stat. Assoc., **44**, N 247, 335–341, 1949
- [6] Sobol', I. M., *A Primer for the Monte Carlo Method*, Boca Raton: CRC Press, Inc., 1994

## Sådan smager dit nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

*Rie Jensen og Katrine Gravesen*

Efter en laaaaang sommerferie er vi tilbage med flere anmeldelser af dit nærmiljø. Vi har i denne udgave valgt at tage den hipsterstatistiske hat på og vil give dig en guide til Nørrebro's mange smarte (nogle kalder det ægte) madmuligheder.

### Takii - Sushi Restaurant, ★★★★★☆☆☆

Fisk er godt, og fisk er sundt, og fisk kan sagtens spises med tang og ris i store mængder. Med et sådant udgangspunkt er all-you-can-eat-sushi jo et glimrende koncept. *Takii* ligger på Jagtvej 113, og her kan du få alt, hvad hjertet begærer i fiskens friske univers. Det koster 178 kr. mandag-torsdag og 198 kr. fredag-søndag, og selvom det er mange penge for en på SU, så er det rart at få lov til at spise så meget, man vil. Vi vil ikke sidde og nævne japanske gloser i flæng, for man kan få det hele! De har også sushi med and (ikke en succes hos os), og man kan få kødspyd, salat og nudler. Så selv hvis man ikke er til al den fisk, så kan man sagtens være med. Betjeningen er sød, og vi var glade for de små bestillingssedler, som man udfylder og giver til tjeneren. Den søde kok tilbereder herefter den friske sushi, og mens man spiser, kan man så passende overveje sin næste bestilling. Stedet er dog ikke Nørrebro's hyggeligste. Indretningen er anonym, og selvom man gerne vil sidde længe og spise, så blev vi i hvert fald ikke for stemningen i restauranten. Man kan også bestille takeaway, men så får man jo ikke alt, man kan spise, og det er helt sikkert den største bonus ved *Takii*.

### Nordic Noodle, ★★☆☆☆

Leder man efter et hipstersted med ekstra hipster, så er *Nordic Noodle* på Nørrebrogade 29 helt optimalt. Her er T-shirts ærmer rullet op, og selvom det er formiddag, så er stemningen smart i en fart. Som navnet indikerer, serveres nudler med et nordisk twist. Du vælger først en grundpakke (trin 1). Den koster 42 kr. og indeholder altid hvidkål, gulerødder og æg. Så vælger man mellem nudler og ris (fuldkorn selvfølgelig), og trin 2 er tilbehør. Her kan vælges alt mellem kylling, tiggerrej, grøntsager og chili, og priserne varierer mellem 5 og 16 kr. pr. tilbehør. Til sidst vælges sauce (trin 3) og en topping. Det kunne være en kombination af stærk (!) chili sauce og koriander. Efter alle de valg tager du plads i de fancy møbler og nyder den skøre sammensætning af designermøbler og farmorkunst på væggen. Imens går drengene bag disken i gang under den kæmpe store emhætte, og efter 2 minutter er maden klar. Du kan sagtens blive og spise (og se herresmart ud samtidig), eller du kan få maden med dig ud i den fagre verden. Selvom det ikke er i hipsterånden, så synes vi, at prisen er det mest kritiske ved *Nordic Noodle*, for 70 kr. er i overkant for frokost, men vi fik også et stort måltid, og vil du gerne være lidt mere cool og nede med de fedde, så fås det altså her.

Fat din cap og din opsparing, og mød Nørrebro's hipstere med et åbent sind. De er sgu meget søde.

ind i  $D$  med fælles fordeling  $P_X$  af  $X_n$  på  $(D, \mathfrak{B}_D)$  for ethvert  $n \in \mathbb{Z}_+$  og antag at  $\{x^*\}$  er en nulmængde i  $(D, \mathfrak{B}_D, P_X)$ . Lad  $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  være et system af reelle stokastiske variable på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  givet ved

$$Y_n = w(X_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Hvis der for ethvert  $\delta > 0$  gælder, at

$$P_{Y_n}((w(x^*), w(x^*) + \delta]) > 0,$$

så findes en nulmængde  $\Lambda$  i  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  således, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{Y_1, \dots, Y_n\}(\omega) = w(x^*), \quad \omega \in \Lambda^c.$$

*Bewis.* Siden  $\{x^*\}$  er en nulmængde i  $(D, \mathfrak{B}_D, P_X)$ , så er  $(X_n)^{-1}(\{x^*\})$  en nulmængde i  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  for ethvert  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Men  $(X_n)^{-1}(\{x^*\}) = (Y_n)^{-1}((-\infty, w(x^*)))$ . Således har vi etableret, at

$$P_{Y_n}((-\infty, w(x^*))) = 0. \quad (1)$$

Lad  $\delta > 0$  være givet. Jævnfør vor antagelse har vi, at

$$P_{Y_n}((-\infty, w(x^*) + \delta]) = P_{Y_n}((w(x^*), w(x^*) + \delta]) > 0,$$

hvor lighedstegnet følger af (1). Fra dette og fra uafhængigheden af systemet  $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  har vi, at

$$P_{\min\{Y_1, \dots, Y_n\}}((w(x^*) + \delta, \infty)) = \{1 - P_{Y_n}((w(x^*), w(x^*) + \delta])\}^n$$

hvilket giver anledning til følgende geometriske række:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{\min\{Y_1, \dots, Y_n\}}((w(x^*) + \delta, \infty)) = \frac{1 - P_{Y_n}((w(x^*), w(x^*) + \delta])}{P_{Y_n}((w(x^*), w(x^*) + \delta])}.$$

Problemet er at minimere (eller maksimere) funktioner, som ofte har et stort antal dimensioner.

Lad  $\mathbf{W}(\mathbb{R}^d)$ , for et  $d \in \mathbb{N}$ , betegne samlingen af alle kontinuerlige funktioner  $w$  på  $\mathbb{R}^d$  ind i  $\mathbb{R}$ . Vores ambition i dette afsnit er at beskrive metoder til løsning af (evt. multiekstremale) optimeringsproblemer:

$$\begin{cases} \min_{x \in D} w(x), & w \in \mathbf{W}(\mathbb{R}^d), \\ D \text{ kompakt, } & D \subset \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Mange teoretiske og praktiske problemstillinger kan modelleres indenfor denne generelle ramme.

**Lemma 10 (Borel-Cantelli)** Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt og lad  $F_n \in \mathfrak{F}$  for  $n \in \mathbb{N}$ . Hvis

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(F_n) < \infty,$$

så er

$$P(\bigcap_{k=n}^{\infty} F_k) = 0.$$

Bevis. Se [4]

**Sætning 11 (Simpel Monte Carlo-optimering)** Lad  $w \in \mathbf{W}(\mathbb{R}^d)$ , for et  $d \in \mathbb{N}$ , være en kontinuert funktion på  $\mathbb{R}^d$  ind i  $\mathbb{R}$  og lad  $D$  være en kompakt delmængde af  $\mathbb{R}^d$ . Antag, at der findes et entydigt punkt  $x^*$  i  $\mathbb{R}^d$  således, at

$$x^* = \arg \min_{x \in D} w(x).$$

Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt og lad  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  være et uafhængigt system af  $d$ -dimensionale stokastiske variable på  $\Omega$

## En statistikstuderendes bekendelser

Søren Wengel Mogensen

Om at skrive BSc-opgave i anvendt statistik.

Der findes matematikere (i hvert fald matematikstuderende), der mener, at den rene matematik er den fineste. Hvor denne vildfarelse stammer fra, er mig ubekendt, men hvis nogen læsere ligger inde med historiske kilder eller tidlige eksempler på en sådan holdning, så er redaktionen interesseret i at modtage disse.

Under alle omstændigheder gjorde jeg det kontroversielle at skrive BSc-opgave i anvendt statistik. Denne artikel er ikke et kampskrift for statistikken, men derimod en venlig håndsrækning med et tilbud om oplysning. Den giver nemlig både et indblik i forløbet omkring en BSc-opgave i anvendt statistik samt beskriver i korte træk min opgave.

### Hvordan foregår det?

Forløbet omkring en BSc-opgave i anvendt statistik er strukturelt noget anderledes end ved BSc-opgaver i matematik. For det første foregår vejledningen langt hen ad vejen på gruppebasis, da alle studerende, der skriver samtidigt, har de samme vejledere. I mit tilfælde var det Helle Sørensen og Ernst Hansen. Man kan sikkert både finde styrker og svagheder ved en sådan ordning, men i hvert fald giver det en god mulighed for at ping-ponge med de andre studerende og udveksle idéer, hvilket er lærerigt.

For det andet starter hele forløbet med, at man i gruppen sammen med vejlederne løser en række opgaver, som skal sætte én i stand til lave selve sin BSc-opgave.

## Hvad blev det til?

For at kunne lave anvendt statistik skal man efter de indledende opgaver have noget at anvende sine statistiske evner på. Som udgangspunkt er det vejlederne, der skaffer et datasæt til at tjene dette formål. Vi fik et datasæt omhandlende forekomsten af tre plantetyper (klokkeløng, hedeløng og blåtop) i den danske natur. Fokus for opgaven var på kløgtig vis at udtale sig om status og udvikling for klokkeløngen, som er den karakteristiske plantetype for den våde hede. Ja, så ved man det.

I bund og grund var spørgsmålene, der skulle besvares, simple: hvordan udvikler forekomsten af klokkeløng sig med tiden og hvorfor? I datasættet var der nemlig også en hel række potentielle forklarende variable.

Noget af det mest spændende ved forløbet var klart den frihed, der naturligt ligger i opgaven. Man har data, man har nogle idéer, og så skal man finde ud, hvad der giver mening, og hvad der ligger inden for ens egen rækkevidde. Samtidig er det sandsynligvis første gang, man stifter bekendskab med rigtige data. Ikke de populære skoleeksempler fra en lærebog, men rigtige, beskudte data, som ikke selv tilbyder en åbenlys løsning.

En fyldstøgende beskrivelse af data, og hvad jeg gjorde med det, ville blive en lang smøre. Her følger derfor en ganske overfladisk beskrivelse. Jeg endte med at anvende en logistisk regressionsmodel til data. Herved opskriver man en model, der løst sagt beskriver sandsynligheden for at observere klokkeløng på et bestemt sted til en bestemt tid givet en række forklarende variable (vegetationshøjden, pH-værdien i jorden og meget andet). Vi forestiller os, at eksistensen af klokkeløng på et bestemt sted til en bestemt tid er et udfald af en binær stokastisk variabel, hvis middelværdi (og sandsynligheden for at den stokastiske variabel

2. Dersom integralerne i 1. eksisterer og dersom  $\{X_n: n \in \mathbb{N}\}$  er et uafhængigt system af stokastiske variable på  $\Omega$  ind i  $D$  med fælles fordeling  $P_X$  af  $X_n$  for ethvert  $n \in \mathbb{N}$ , så findes en nulmængde  $\Lambda$  i  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  således, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(X_k)(\omega)}{p(X_k)(\omega)} = \int_D f \, dm_L, \quad \omega \in \Lambda^c.$$

*Bevis.* 1. er oplagt og 2. følger af STORE TALIS STÆRKE LOV.  $\square$

**Eksempel 9** (Simpel Monte Carlo-integration) Lad  $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$  være et uafhængigt system af stokastiske variable på et sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  ind i  $(a, b)$  for  $a, b \in \mathbb{R}$  med  $a < b$ . Lad ligefordelingen på  $(a, b)$  være fordelingen af  $U_n$  for ethvert  $n \in \mathbb{N}$ . Lad  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, m_L)$ .

1. Der gælder, at

$$(b - a) \mathbf{E}[f(U_1)] = \int_{(a,b)} f \, dm_L, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Der findes en nulmængde  $\Lambda$  i  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  således, at

$$(b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k)(\omega) = \int_{(a,b)} f \, dm_L, \quad \omega \in \Lambda^c.$$

Det er klart, at den ovenstående procedure for Monte Carlo-integration let lader sig generalisere til flere dimensioner. Dette generalisationsproblem overlades til læseren.

## Monte Carlo-optimering

Simulation af stokastiske variable i numerisk optimering er en anden stærk og meget populær anvendelse af Monte Carlo-metoden.



1. Lad  $\{U_n : n = 1, \dots, 12\}$  være et uafhængigt system af lige fordelte stokastiske variable defineret på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Observer, at  $\mu \equiv \mathbf{E}(U_n) = 1/2$ ,  $\sigma = \mathbf{E}[(U_n - \mu)^2]^{1/2} = 1/\sqrt{12}$ .
2. Den stokastiske variabel  $\sum_{k=1}^{12} U_k - 6$  på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  er fordelt approksimativt  $N(0, 1)$ .

### Monte Carlo-integration

Monte Carlo-integration er en numerisk metode til approksimation af integraler ved hjælp af sandsynlighedsbaserede metoder og næsten enhver Monte Carlo udregning kan betragtes som et forsøg på at approksimere integralet

$$\int_D f \, d\mathbf{m}_L,$$

for et  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, m_L)$  og  $D \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ , hvor  $m_L$  er Lebesgue målet på Borel  $\sigma$ -algebraen  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$  af delmængder af  $\mathbb{R}$ . Vi ser, at integralet kan repræsenteres som en middelværdi af en stokastisk variabel.

**Sætning 8 (Monte Carlo-integration)** *Lad  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$  og lad  $D \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ . Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt og lad  $X$  være en stokastisk variabel på  $\Omega$  ind i  $D$  og lad  $P_X$  være fordelingen af  $X$  på  $(D, \mathfrak{B}_D)$ . Antag, at  $P_X$  er absolut kontinuert med hensyn til  $m_L$  og lad  $p \equiv \frac{dP_X}{dm_L}$  være den Radon-Nikodym afledede af  $P_X$  med hensyn til  $m_L$ .*

1. Der gælder, at

$$\mathbf{E} \left[ \frac{f(X)}{p(X)} \right] = \int_D f \, d\mathbf{m}_L,$$

*i den forstand, at eksistensen af den ene side medfører eksistensen af den anden og lighedstegnet.*

er 1) afhænger af to ting: Den afhænger af nogle såkaldte faste effekter. Det kunne eksempelvis være vegetationshøjden på det givne sted og tidspunkt. Derudover afhænger den i den model, jeg opstillede, af nogle tilfældige effekter. Tilfældige effekter introduceres i STAT2, og en egentlig forklaring på, hvad det er, bliver lidt for lang til denne artikel. Dog kan man helt kort sige, at i klokkefyngstilfældet må man formode, at der er en vis korrelation mellem eksempelvis observationer, der ligger tæt på hinanden geografisk. Det kan man modellere ved at bruge tilfældige effekter.

Derudover skal det vælges, hvilke forklarende variable der skal indgå i en model. I STAT1 og STAT2 bruges en ret mekanisk fremgangsmåde, hvor man tester sig nedad i en model ved hjælp af likelihoodratio-tests. Denne metode kan dog let vise sig at være uheldig, når man står med mange potentielle forklarende variable. Derfor brugte jeg flere forskellige metoder for at komme frem til en model. Selve modelopbygningen er en langsom og langsom proces, hvor man hele tiden skal holde tungen lige i munden for at kunne argumentere sagligt for de valg, der uundgåeligt skal foretages.

En af de største udfordringer var at gennemføre en hæderlig modelkontrol. Den beskrevne model er en generaliseret lineær model med tilfældige effekter. I litteraturen kan man finde forskellige bud på, hvordan man kan lave modelkontrol i sådan en model, men det viser sig, at der ikke er nogen hverken autoritativ eller skudsikker metode. Jeg brugte nogle idéer fra en artikel om såkaldte kumulative residualer (D.Y. Lin et al., Model-Checking Techniques Based on Cumulative Residuals, 2002). Denne artikel beskæftiger sig dog kun med generaliserede lineære modeller uden tilfældige effekter, så jeg valgte derfor også at undersøge ved simulation, hvorvidt metoden kunne bruges i pågældende tilfælde.

Kort sagt så går idéen ud på, at man definerer de kumulative

residualer som følgende funktion

$$W(x) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n I(z_i \leq x) \cdot r_i,$$

hvor  $n$  er antal observationer,  $I$  er indikatorfunktionen,  $z_i$  er den  $i$ 'te værdi af en given kovariat (forklarende variabel), og  $r_i$  er residualet hørende til den  $i$ 'te observation.  $W(x_0)$  for en given kovariat er altså en skaleret sum af de residualer, der hører til observationer, for hvilke den givne kovariatværdi er mindre end eller lig med  $x_0$ . Når man så vil foretage modelkontrol på en given model, gøres det ved at simulere en række datasæt fra denne model og grafisk sammenligne de kumulative residualer hørende til de simulerede datasæt med de kumulative residualer hørende til det originale data. I figur 1 ses kumulative residualer hørende til kovariatene med det mundrette navn **HedelyngNY**. Håbet er i dette tilfælde, at hvis denne kovariat indgår på en ubeldig måde i modellen, vil der være væsentlig forskel på den sorte og de grå grafer.

Som tidligere bemærket er dette dog heller ikke nogen skruksikker metode, hvorfor jeg også lavede en hurtig kontrol af modelkontrollen. Her simulerede jeg data fra to forskellige modeller, fittede begge datasæt til én af modellerne og sammenlignede derefter de kumulative residualer. Her vidste jeg jo, at én af modellerne var fejlspecificeret, og det interessante var jo naturligvis, om metoden kunne afsløre det. Det kunne den til en vis grad, men det siger sig selv, at træerne ikke vokser helt ind i himlen.

## Hvad endte det med?

En af statistikerens fornemmeste opgaver er efter min ydmyge opfattelse at anskueliggøre ikke kun sine konklusioner, men også i

FAMØS november 2013

Eksemplet klargør, at alternative metoder til frembringelse af normalfordelte variable må tages i brug. Vi nævner i flæng: *Numerisk approksimation* af  $q$ , *Box-Muller*, *Acceptance-Rejection*, etc.

**Sætning 6** (Den centrale grænseværdisætning) Lad  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  være en familie af reelle stokastiske variable på et sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Antag, at følgende tre betingelser er opfyldt.

1. Familien  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  er et uafhængigt system af stokastiske variable på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .
2. Der findes et sandsynlighedsmål  $Q$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$  således at  $Q$  er fordelingen af  $X_n$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$  for ethvert  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Følgende integraler eksisterer og er endelige:  $\mu \equiv \mathbf{E}(X_n)$ ,  $\sigma^2 \equiv \mathbf{E}[(X_n - \mu)^2] > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Lad  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  være systemet af stokastiske variable på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  defineret ved

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Da gælder, for alle  $a, b \in \mathbb{R}$  hvor  $a < b$ , at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{Z_n}((a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

hvor  $\Phi$  er fordelingsfunktionen hørende til fordelingen  $N(0, 1)$ .

*Bewis.* Se [1]. □

**Eksempel 7** Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt. Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel og lad  $N(0, 1)$  være fordelingen af  $X$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ . Fraktilfunktionen  $q$  hørende til  $P_X$  eksisterer ikke på eksplisit form.

23. årgang, nr. 2

Sætningen klargør, at denne produktionsproces faktisk giver et udfald af en stokastisk variabel med den ønskede fordeling  $P_X$ . Lad os illustrere metoden med et simpelt eksempel.

**Eksempel 4** Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt. Lad  $X$  være positiv reel stokastisk variabel og lad for et  $\lambda > 0$ ,  $\exp(\lambda)$  være fordelingen af  $X$  på  $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+})$ . Fraktilfunktionen  $q$  hørende til  $P_X$  er givet ved

$$q(p) = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}, \quad p \in (0, 1).$$

1. Lad  $U$  være en ligefordelt stokastisk variabel defineret på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .
2. Den stokastiske variabel  $-\log(1-U)/\lambda$  på  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  er fordelt  $\exp(\lambda)$  på  $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+})$ .

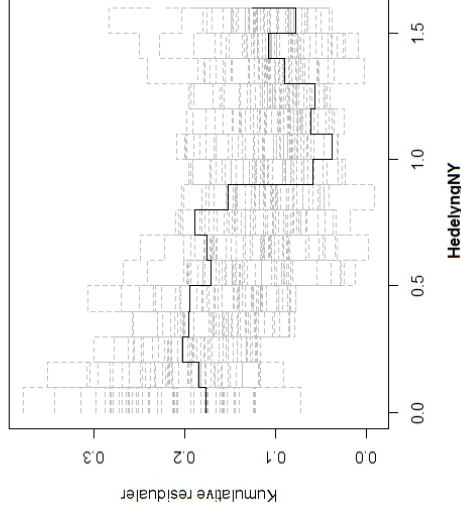
Der findes situationer, hvor man gerne vil simulere stokastiske variable med en fordeling, hvor fordelingen er så kompliceret, at det ikke er helt enkelt at gå direkte til fraktilfunktionen.

**Eksempel 5** Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt. Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel og lad  $N(0, 1)$  være fordelingen af  $X$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ . Genkald, at fordelingsfunktionen hørende til  $P_X$ , betegnet ved  $\Phi$ , er givet ved

$$\Phi(y) = \int_{(-\infty, y]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} m_L(dx), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Da det er klart, at  $\Phi \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$  med positiv differentialkvotient, så er funktionen strengt voksende på  $\mathbb{R}$  og en fraktilfunktion  $q$  hørende til  $P_X$  eksisterer entydigt, som den inverse af  $\Phi$ .

For så vidt som fordelingsfunktionen  $\Phi$  ikke kan gives et analytisk udtryk (uden brug af specielle funktioner), så kan fraktiltransformationsmetoden ikke direkte anvendes.



**Figur 1** Kumulative residualer for det originale data fittet til en model (sort) og data simuleret fra modellen og derefter fittet til samme (grå).

særlig grad den usikkerhed, der er forbundet med konklusionerne. Det betyder dog også, at de konklusioner, man når frem til, som oftest vil være pakket ind i indtil flere lag af modererende ord og udtryk. Således kunne jeg i min konklusion blandt andet pege på, at forekomsten af klokkeløng, når du støder på den. Måske er tendens. Så pas på klokkeløng. Som tidligere nævnt hører klokkeløng til den på retræte. Som tidligere nævnt hører klokkeløng til den våde hede, men data kunne ikke påvise, at den faldende tendens (hvis den findes) skyldtes afvanding af de våde hedeområder. Så

omvendt er der altså ikke noget argument for at give sig til at vande klokkelysten.

På det mere personlige plan endte hele forløbet med at være en sand liddåb udi statistikken. Man stifter bekendtskab med mange nye områder og arbejder med statistik på en helt ny måde. Det, man har lavet i STAT1 og STAT2, svarer lidt til at have fået styr på et forhåndsslag og et baghåndsslag i tennis, hvorimod BSc-opgaven er ens første rigtige kamp. I kampen får man nemlig brug for både sin forhånd og baghånd, men man får også brug for en hel bunke andre ting, som man må lære hen ad vejen.

Vigtigheden af følgende sætning er ikke til at tage fejl af. Sætningen understreger den centrale rolle, som ligefordelingen spiller i simulationsmodellering.

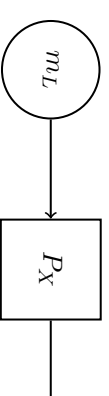
**Sætning 3** *Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt. Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på  $\Omega$ , lad  $P_X$  være fordelingen af  $X$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$  og lad  $q$  være en fraktilfunktion hørende til  $P_X$ . Betragt sandsynlighedsfeltet  $((0, 1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, m_L)$ , hvor  $m_L$  er Lebesgue målt på Borel  $\sigma$ -algebraen  $\mathfrak{B}_{(0,1)}$  af delmængder af  $(0, 1)$ , og lad  $U$  være en stokastisk variabel på  $\Omega$  ind i  $(0, 1)$  med fordeling  $m_L$ . Da gælder, at*

$$P_X = (q \circ U)(P).$$

*Bewis.* Se [3].

□

Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på et bagvedliggende sandsynlighedsfelt  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  og lad  $q$  være en fraktilfunktion hørende til fordelingen  $P_X$ . Frembringelsesprocessen af stokastiske variable med denne fordeling er sammensat som en serieforbindelse af to delprocesser, som i figur 2.



**Figur 2** Frembringelse af stokastiske variable.

Den første delproces i udarbejdelsen af input til en simulation består i, at frembringe en ligefordelt stokastisk variabel  $U$  på det ovennævnte sandsynlighedsfelt. Dernæst fokuseres på at lade den ligefordelte stokastiske variabel undergå metamorfosen til  $q \circ U$ .

Observer, at metoden til estimation af arealet  $A$  kun er gyldig, når de tilfældige punkter ikke blot er ‘tilfældige punkter’ i enhedskvadratet, men faktisk er ‘ligeligt fordelt’ på hele enhedskvadratet.

For at kunne replikere eksemplet kræves altså en metode til produktionen af ligefordelte stokastiske variable i enhedskvadratet. Dette skridt består i virkeligheden i at kalde en subroutine i et computerprogram, en s.k. *pseudotilfældig tal-generator*, som udfører den bestemte opgave at producere visse følger af tal, der til ethvert praktisk formål er uskelnelige fra udfald af ligefordelte stokastiske variable. Denne frembringelsesproces blev beskrevet i detaljer i sidste udgave af FAMØS i artiklen »*Pseudotilfældige tal*«.

### Simple sandsynlighedsbaserede modeller

Fraktiltransformation metoden

Vi beskriver i dette afsnit en simpel model til frembringelsen af værdier af en stokastisk variabel med en given sandsynlighedsfordeling.

**Definition 2** Lad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  være et sandsynlighedsfelt. Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på  $\Omega$  og lad  $P_X$  være fordelingen af  $X$  på  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ . Ved  $p$ -fraktilerne hørende til  $P_X$  for et  $p \in (0, 1)$  forstås mængden

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{y \uparrow x} P_X((-\infty, y]) \leq p \leq P_X((-\infty, x]) \right\}.$$

Et element i mængden kaldes en  $p$ -fraktil for  $P_X$ . Ved en fraktilfunktion hørende til  $P_X$  mener vi en funktion  $q$  på  $(0, 1)$  ind i  $\mathbb{R}$  således at for alle  $p \in (0, 1)$ , så er  $q(p)$  en  $p$ -fraktil for  $P_X$ .

FAMØS november 2013

## Sandsynlighedsbaserede metoder

### – Monte Carlo-metoden

*Daniel Kjær*

I sidste udgave af FAMØS kunne læseren finde første halvdel af en todelte artikelserie om sandsynlighedsbaserede metoder under afsluttet med titlen »*Sandsynlighedsbaserede metoder*« med undertitlen »*Pseudotilfældige tal*«. I denne artikel præsenterede forfatteren flere fundamentale begreber for pseudotilfældige tal-generatorer fra et ergodeteoretisk synspunkt.

Den foreliggende artikel er den anden halvdel i serien og denne artikel omhandler den egentlige Monte Carlo-metode. De problemer vi i det følgende vil betragte er kendetegnet ved, at de er meget enkle og fremstillingen af emnet kræver kun et indledende kendskab til målteori.

### Monte Carlo-metodens generelle idé og oprindelse

Inspiration til numeriske metoder kan springe fra alle mulige uforventede kilder. *Simuleret udglødning* har taget sit navn fra metallurgien (læren om metalleres fremstilling, egenskaber og bearbejdning) og *splines* blev først taget i anvendelse af tekniske skitsetegningere. På en tilsvarende facon er Monte Carlo-metoden rodfæstet i hazardspillet. Og hvem føler ikke en slags fjernt ekko af noget glamorøst ved navnet Monte Carlo-metoden?

Selve navnet er afledt af byen Monte Carlo i fyrstendømmet Monaco. Byen er berømt verden over for sit grand casino, »*Casino de Monte-Carlo*«, et ikon for industrien for hazardspil. Det korte af det lange er, at Monte Carlo-metoden ikke kan hjælpe én med at vinde i roulette; metoden er end ikke et forsøg på det.

23. årgang, nr. 2

Monte Carlo-metoden er en numerisk metode til løsningen af matematiske problemer ved hjælp af simulation.

Monte Carlo-metodens teoretiske fundament, i særdeleshed de store tals lov, har længe været kendt. Men siden simulation af stokastiske variable per håndkraft er en svært majsommelig proces, har Monte Carlo-metoder været praktisk umulige at udføre uden hjælp fra en computer. Det er derfor ikke overraskende, at Monte Carlo-metoden som universelt anvendt numerisk teknik er snævert forbundet med udbredelsen af computeren.

Monte Carlo-metodens alment accepterede oprindelsesdag er 1949, hvor en artikel under overskriften »*The Monte Carlo Method*« dukkede op. De amerikanske matematikere Jersey Neyman og Stanislaw Ulam betragtes som værende ophavs mændene til denne artikel. I Sovjetunionen publiceredes de første artikler om Monte Carlo-metoden i 1955 og 1956 af V. V. Chavchanidze, Yu. A. Schreider og V. S. Vladimirov.

For hver ny generation af computere finder Monte Carlo-metoden nye anvendelsesområder.

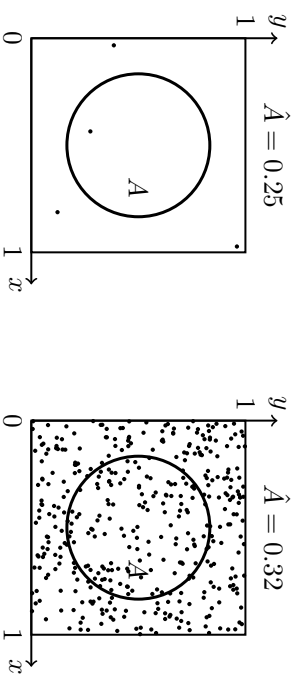
### Differentia specifica og et simpelt eksempel

Vores udgave af Monte Carlo-metoden er kendetegnet ved, for det første, den beregningsmæssige enkle struktur af algoritmen. Algoritmen består i almindelighed af en proces til produktionen af en tilfældig hændelse. Processen gentages  $n \in \mathbb{N}$  gange, med hvert forsøg uafhængigt af de forrige og resultaterne bruges til dannelsen af et gennemsnit.

Et andet særkende ved metoden er, som hovedregel, at fejlen fra udregningen er proportional med  $\sqrt{1/n}$ , hvor  $n$  er antallet af forsøg. For at opnå høj præcision må man altså have et stort antal gentagelser (for at at formindske fejlen med en faktor 10 er det

nødvendigt at øge  $n$  med en faktor 100). Lad os illustrere metoden med et simpelt eksempel.

**Eksempel 1** (Hit-or-Miss Integration) Forestil dig, at vi har brug for at udregne arealet,  $A$ , af en figur i planen begrænset af enhedskvadratet. Det skal principielt være en kompliceret figur, før det kommer til sin ret at sætte Monte Carlo-metoden i anvendelse, men af hensyn til bekvemmelighed lader vi figuren være en cirkel som vist i figur 1.



Figur 1 Approximation af arealet  $A = 0.35$ .

Vælg tilfældigt  $n$  punkter i kvadratet og betegn ved  $n'$  antallet af punkterne, der falder indenfor cirklen. Det er fra figuren klart, at cirkelns areal approksimativt er lig med  $n'/n$ . Jo større  $n$ , desto bedre approksimation.

I skemaet til venstre ser vi, at 1 af 4 punkter er faldet indenfor cirklen, så vores estimat for cirkelns areal er  $n'/n = 1/4 = 0.25$ . I skemaet til højre er 128 af 400 punkter faldet indenfor cirklen, så vores estimat for cirkelns areal er  $n'/n = 128/400 = 0.32$ . Cirkelns faktiske areal er lig med  $A = 0.35$ .