Løsning på præmieopgave
– 23. årgang, nr.1

Anders Druedahl og Martin Andersen

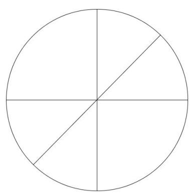
Denne artikel er en besvarelse af følgende opgave:

"Lad $n \in \mathbb{N}$. En pizzakniv trækkes igennem en pizza n gange. Hvad er det maksimale antal stykker, pizzaen kan skæres op i?"

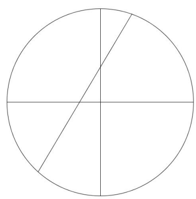
Vi gør os først følgende observationer:

- Den første skæring vil altid efterlade os med to stykker pizza.
- Et nyt stykke pizza fremkommer ved at en skæring rammer et stykke pizza.
- At en skæring rammer k stykker pizza er ækvivalent med at en skæring rammer tidligere skæringer i $k-1$ forskellige punkter.

Antag pizzaen er konveks, som vi kender den. Vi starter med at bemærke, at hvis pizzaen skæres igennem midten vil vi altid få det dobbelte antal stykker som overskæringer, altså bliver antal stykker pizza som funktion af antallet af snit $s(n) = 2n$ for $n \in \mathbb{N}$. Her ses et eksempel $s(3) = 2 \cdot 3$:



Den anden mulighed, som ikke giver så pæne stykker (men et stort antal stykker), er at prøve at skære så mange tidligere snit over som muligt uden at skære igennem tidligere skæringer. De to første snit vil være de samme som i tilfældet ovenover, dog behøver de ikke gå igennem midten. Det næste snit vil vi lægge, så vi skærer samtlige tidligere snit over. Med denne taktik får vi som før $S(1) = 2, S(2) = 4$, men ved det tredje snit kan vi rent faktisk få syv stykker pizza:



Hvis man vil, kan man fortsætte lidt endnu. Da finder man let $S(4) = 11, S(5) = 16, S(6) = 22 \ldots$

Da vi med denne taktik altid skærer alle tidligere snit over, vil det være den optimale taktik til at få flest stykker pizza ved n skæringer. Dette kan altid lade sig gøre, da vi blot kan lægge vores snit, så de ikke er parallelle samt at der aldrig er mere end to linjer, der skærer hinanden i et givet punkt. Det er klart, at vi altid vil kunne snitte, så intet snit er parallelt. Hvis der ikke findes et snit inden for pizzaen, så ikke mere end to snit skærer hinanden i et punkt, kan vi blot placere det uden for pizzaen og skalere snittene ned (eller pizzaen op). På denne måde vil vi altid udskære det maksimale antal stykker.

Betragt nu følgen af størst mulige antal stykker pizza ordnet efter antal snit samt følgen af differensen på hvert led og differensen på dennes led:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2 & & 4 & & 7 & & 11 & & 16 & & 22 \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

Vi har nu to differensfølger. En lineær følge vil have en konstant differensfølge (da en linje har konstant hældning). Ved at betragte de tre følger (hvoraf den sidste er konstant) kan man tænke, at vores oprindelige følge af maksimale antal pizzastykker må være på formen

$$S(n) = An^2 + Bn + C$$

Idet den midterste må være en lineær differensfølge. Ved at udnytte, at $S(1) = 2, S(2) = 4, S(3) = 7$ fås nu følgende ligningssystem:

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 2 \\
4A + 2B + C &= 4 \\
9A + 3B + C &= 7
\end{aligned}
$$

Vi løser ligningssystemet:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1} \\ \xrightarrow{R_3 - 9R_1} \end{matrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -11 \end{bmatrix}
\xrightarrow{R_3 - 3R_2}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Det fremgår heraf, at $C = 1, B = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{2}$ og altså bliver antallet af stykker pizza som funktion af antal snit

$$S(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$