

Løsning af præmie- og ekstraopgave

– 23. årgang, nr. 1

Martin Wedel Jacobsen

Både præmieopgaven og ekstraopgaven er specialtilfælde af en mere generel opgave: Hvor mange stykker kan en n -dimensionel kugle deles op i med s snit? Præmieopgaven er tilfældet $n = 2$, ekstraopgaven er tilfældet $n = 3$. Ved at løse denne mere generelle opgave får man altså håndteret begge opgaver på en gang.

Først bemærker vi at vi lige så vel kan se på opdelinger af hele det n -dimensionelle rum: En opdeling af kuglen giver selvfølgelig en opdeling af rummet med mindst lige så mange stykker, mens en opdeling af rummet giver en opdeling af kuglen med lige så mange stykker ved at vælge et punkt i hvert stykke og placere kuglen så den indeholder alle disse punkter. Vi kan derfor se bort fra kuglen.

Vi ser altså på denne situation: Vi har en mængde V bestående af s hyperplaner i $\mathbb{R}^n$ som opdeler $\mathbb{R}^n$ i et antal sektioner, og vi ønsker at bestemme det maksimalt mulige antal sektioner. Vi vil gøre dette ved at tildele hver sektion en delmængde af V og tælle disse delmængder i stedet.

Lemma 1 *Antag at V indeholder et antal hyperplaner som har ikke-tom fællesmængde og hvis normalvektorer ikke er lineært uafhængige. Da kan antallet af sektioner forøges ved at parallelforskyde en af hyperplanerne.*

Bevis. Antag at der findes et sådant system af hyperplaner i V ; udvælg blandt disse k hyperplaner $H_1, \dots, H_k \in V$ med normalvektorer $v_1, \dots, v_k$ således at $v_1, \dots, v_{k-1}$ er lineært uafhængige mens $v_1, \dots, v_k$ ikke er det. Vi foretager et basisskift ved at vælge

$v_1, \dots, v_{k-1}$ til at være de første $k-1$ basisvektorer; ydermere foretager vi en parallelforskydning der placerer et punkt i $\bigcap_{i=1}^k H_i$ i origo. Da har H_i ligningen $x_i = 0$ for $1 \leq i \leq k-1$, mens H_k har ligningen $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i = 0$ for nogle reelle tal m_i . Vi skifter nu fortegn på de x_i for hvilke m_i er negativ; herefter er $m_i \geq 0$ for alle i .

Hyperplanerne $H_1, \dots, H_{k-1}$ opdeler nu $\mathbb{R}^n$ i 2^{k-1} sektioner, bestemt af fortegnene på de første $k-1$ koordinater af x . Sektionen med $x_i > 0$ for $1 \leq i \leq k-1$ skæres ikke af H_k , for i denne sektion er $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i > 0$ for alle punkter. Men hvis vi parallelforskyder H_k til hyperplanen med ligningen $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i = \varepsilon$ for et vilkårligt $\varepsilon > 0$, så vil der findes punkter med $x_i > 0$ for $1 \leq i \leq k-1$ men $\sum_{i=1}^{k-1} m_i x_i < \varepsilon$. Der er dermed skabt en ny sektion. Da der kun er endeligt mange sektioner, kan vi sikre os at ingen sektioner forsvinder ved denne flytning ved blot at vælge ε tilstrækkelig lille.

Bemærk desuden at vi også kunne have flyttet H_k den anden vej, og derved opdelt sektionen med $x_i < 0$ for $1 \leq i \leq k-1$. $\square$

Vi kan derfor fra nu af antage at hvis en mængde af hyperplaner i V har ikke-tom fællesmængde, så er deres normalvektorer lineært uafhængige. Dette betyder specielt at fællesmængden af k hyperplaner i V enten er tom eller et $(n-k)$ -dimensionelt affint delrum.

Vi får også brug for følgende observation:

Lemma 2 *Lad y være et punkt beliggende på netop k hyperplaner i V , og lad A og B være to forskellige regioner der støder op til y . Da er det muligt at vælge $k-1$ hyperplaner i V indeholdende y således at der findes en omegn om y i fællesmængden af disse hyperplaner hvor alle punkter er indeholdt i enten $\overline{A}$ eller $\overline{B}$.*

Bevis. Lad $H_1, \dots, H_k$ være de hyperplaner der indeholder y ; som før vælges normalvektorerne for disse til at være de første k enhedsvektorer og y vælges til at være origo. Ved eventuelt at skifte fortegn på nogle af koordinaterne kan vi antage at A er sektionen $x_i > 0$ for $1 \leq i \leq k$. Da $B \neq A$ findes der et i så $x_i < 0$ for $x \in B$; ved at permutere koordinaterne kan vi antage at dette i er lig k . Lad nu $L = \bigcap_{i=1}^{k-1} H_i$; en omegn omkring y i L består så af punkter hvor $x_i = 0$ for $1 \leq i \leq k-1$. For disse punkter gælder at hvis $x_k \geq 0$ er de indeholdt i $\overline{A}$, og hvis $x_k \leq 0$ er de indeholdt i $\overline{B}$. $\square$

Lad nu W bestå af alle hyperplaner i V samt for enhver delmængde $\{H_1, \dots, H_k\}$ af V med $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$ de hyperplaner der fremkommer ved at udvide $\bigcap_{i=1}^k H_i$ med $k-1$ af normalvektorerne for $H_1, \dots, H_k$. Lad O være et vilkårligt punkt der ikke ligger i nogle af hyperplanerne i W , og definer funktionen d på $\mathbb{R}^n$ ved at $d(x)$ er afstanden fra x til O .

Lemma 3 *Lad A være en lukket og konveks delmængde af $\mathbb{R}^n$. Da har d et globalt minimumspunkt $m(A)$ på A , og dette punkt er det eneste lokale minimumspunkt for d på A .*

Bevis. Lad K være en lukket kugle omkring O som indeholder et punkt i A . Da er $A \cap K$ kompakt, så $d(A \cap K)$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^+$ og har dermed et mindste element. Altså har d et minimumspunkt x på A . Antag nu at der findes et andet lokalt minimum y . Da A er konveks er linjestykket fra y til x indeholdt i A ; betragt restriktionen af d til dette linjestykke. Da både y og x er lokale minima, er d svagt voksende omkring y og svagt aftagende omkring x , så d har et lokalt maksimum i et indre

punkt på linjestykket. Men dette er umuligt, da restriktionen af d til en linje ikke har noget lokalt maksimum. $\square$

Vi vil anvende Lemma 3 på afslutningerne af sektionerne i $\mathbb{R}^n$ og på affine delrum af $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4 *Når A er et affint delrum af $\mathbb{R}^n$, er $m(A)$ det unikke punkt på A med den egenskab at normalrummet til A i $m(A)$ indeholder O .*

Bevis. Pythagoras. $\square$

Lemma 5 *Lad $H_1, \dots, H_k$ være hyperplaner i V med $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$. Da er $m(\bigcap_{i=1}^k H_i)$ ikke indeholdt i andre hyperplaner i V end $H_1, \dots, H_k$.*

Bevis. Antag at $m = m(\bigcap_{i=1}^k H_i)$ også er indeholdt i $H \in V$. Per Lemma 4 er O indeholdt i normalrummet til $\bigcap_{i=1}^k H_i$ i m , så vektoren fra m til O er en linearkombination af normalvektorerne for $H_1, \dots, H_k$. Da er O indeholdt i den hyperplan som fås ved at udvide $H \cap \left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right)$ med normalvektorerne for $H_1, \dots, H_k$, hvilket er i modstrid med vores valg af O . $\square$

Definition 6 For hver sektion A af $\mathbb{R}^n$ defineres V_A til at være mængden af hyperplaner i V der indeholder $m(\overline{A})$.

Lemma 7 *For enhver sektion A er $m(\overline{A}) = m(\bigcap_{H \in V_A} H)$.*

Bevis. Per definitionen af V_A ligger $m(\overline{A})$ i $L = \bigcap_{H \in V_A} H$, og der findes en omegn omkring $m(\overline{A})$ i L der ikke skærer andre hyperplaner end dem i V_A . Hele denne omegn er derfor indeholdt

i $\bar{A}$, hvilket medfører at $m(\bar{A})$ er lokalt minimum for d på L . Per Lemma 3 er så $m(\bar{A}) = m(L)$. $\square$

Sætning 8 Hvis $V_A = V_B$ er $A = B$.

Bevis. Antag at $A \neq B$ men $V_A = V_B$. Lemma 7 giver at $m(\bar{A}) = m(\bar{B})$, så vi sætter $m = m(\bar{A})$ og betragter en omegn omkring m . Lad $k = |V_A|$; per Lemma 2 kan vi vælge $k - 1$ hyperplaner $H_1, \dots, H_{k-1} \in V_A$ således at i en omegn omkring m i $L = \bigcap_{i=1}^{k-1} H_i$ er alle punkter indeholdt i enten $\bar{A}$ eller $\bar{B}$. Dette betyder at m er lokalt minimum for d på L , så $m = m(L)$. Dermed er $m(L)$ indeholdt i hyperplanen i V_A forskellig fra $H_1, \dots, H_{k-1}$, hvilket er i modstrid med Lemma 5. $\square$

Korollar 9 Hyperplanerne i V opdeler $\mathbb{R}^n$ i højst $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$ sektioner.

Bevis. Vi har til hver sektion tildelt en delmængde af V bestående af hyperplaner med ikke-tom fællesmængde. Disse hyperplaner skal så have lineært uafhængige normalvektorer, så der er højst n af dem. Dermed er der højst lige så mange sektioner af $\mathbb{R}^n$ som der er delmængder af V med højst n elementer. $\square$

Lemma 10 Lad U være en delmængde af V . Hvis hyperplanerne i U har lineært uafhængige normalvektorer, findes der en sektion A med $V_A = U$.

Bevis. Hvis $U = \emptyset$ vælger vi blot den sektion der indeholder O . Antag fra nu af at $U \neq \emptyset$.

Da hyperplanerne i U har lineært uafhængige normalvektorer er $L = \bigcap_{H \in U} H$ ikke-tom. Sæt $m = m(L)$; per Lemma 5 er m

ikke indeholdt i andre hyperplaner end dem i U , så det er nok at finde en sektion A med $m(\overline{A}) = m$.

Lad v være vektoren fra m til O ; per Lemma 4 ligger v i normalrummet til L i m , og den er dermed ikke lineært uafhængig af normalvektorerne til hyperplanerne i U . Lad nu H være hyperplanen gennem m med normalvektor v , og lad K være det halvrum der afgrænses af H og ikke indeholder O . Da er $m = m(\overline{K})$, så det er nok at finde en sektion som støder op til m og er indeholdt i K . At dette er muligt følger nu af beviset for Lemma 1. $\square$

Sætning 11 *Hyperplanerne i V opdeler $\mathbb{R}^n$ i $\sum_{i=0}^n \binom{s}{i}$ sektioner såfremt enhver mængde af op til n hyperplaner i V har lineært uafhængige normalvektorer og der ikke findes $n + 1$ hyperplaner i V med ikke-tom fællesmængde, og en sådan konfiguration er mulig at opnå for ethvert n og s .*

Bevis. Lad der være givet k hyperplaner $H_1, \dots, H_k$ i V med $\bigcap_{i=1}^k H_i \neq \emptyset$. Per anden antagelse er $k \leq n$, og per første antagelse har $H_1, \dots, H_k$ så lineært uafhængige normalvektorer. Vores antagelse efter Lemma 1 er dermed opfyldt, så vi kan bruge Lemma 10 til at konkludere at for enhver delmængde U af V med højst n elementer findes der en sektion A med $V_A = U$.

At det er muligt at opnå denne konfiguration ses ved at placere hyperplaner en af gangen. Når en hyperplan placeres skal dens normalvektor ikke ligge i de delrum af $\mathbb{R}^n$ der udspændes af op til $n - 1$ normalvektorer for tidligere placerede hyperplaner, og dette er muligt da disse delrum har dimension højst $n - 1$. Desuden skal hyperplanen ikke placeres så den indeholder et skæringspunkt for n tidligere placerede hyperplaner, hvilket er muligt da der kun er tale om endeligt mange punkter. $\square$