Løsning af præmie- og ekstraopgave fra Famøs årgang 23, nr. 1

Sune Precht Reeh

Både præmieopgaven og ekstraopgaven er specialtilfælde (med hhv. $d = 2$ og $d = 3$) af følgende generelle problem: Betragt i $\mathbb{R}^d$ en d-dimensional udfyldt kugle D^d. Hvad er det maksimale antal sektioner som D^d kan opdeles i ved brug af N hyperplaner[1] i $\mathbb{R}^d$?

Bemærkning 1 Hvis vi har en opdeling af en kugle D^d i k sektioner ved hjælp af hyperplaner, så vil de samme hyperplaner give en opdeling af hele $\mathbb{R}^d$ i mindst k sektioner. Dette skyldes at hvert par sektioner af kuglen vil være adskilt af mindst én hyperplan, og så vil disse sektioner også være adskilt af samme hyperplan når vi betragter hele $\mathbb{R}^d$.

Hvis vi omvendt har en opdeling af $\mathbb{R}^d$ i k sektioner ved hjælp af hyperplaner, så kan vi, fordi der kun er endeligt mange sektioner, vælge en kugle så stor at den indeholder punkter fra alle k sektioner. Hyperplanerne giver så en opdeling af den valgte kugle i k sektioner.

Vi kan altså lige så godt betragte opdelinger af hele $\mathbb{R}^d$ og se bort fra kuglen i det oprindelige problem. Herefter undersøger vi altså: *Hvad er det maksimale antal sektioner som $\mathbb{R}^d$ kan opdeles i ved brug af N hyperplaner?*

Definition 2 En familie $\mathcal{H}$ af hyperplaner i $\mathbb{R}^d$ siges at være i *generel position* såfremt følgende betingelser er opfyldt:

[1] En *hyperplan* i $\mathbb{R}^d$ er et $(d-1)$-dimensionalt affint underrum. En hyperplan H kan beskrives ud fra et punkt p i hyperplanen samt en normalvektor n til hyperplanen, i så fald er H fastlagt ved skalarproduktet $\langle n, (x-p)\rangle = 0$.

(i) For ethvert valg af op til d hyperplaner i $\mathcal{H}$, skal hyperplanernes normalvektorer være lineært uafhængige.

(ii) Der findes ikke $d+1$ hyperplaner i $\mathcal{H}$ sådan at de alle har et fælles punkt.

Lemma 3 *Lad $\mathcal{H}$ være en familie af hyperplaner i generel position i $\mathbb{R}^d$ med $d \geq 2$, og lad H være en hyperplan der ikke er i familien $\mathcal{H}$. Den udvidede familie $\mathcal{H} \cup \{H\}$ er da i generel position hvis og kun hvis alle de $(d-2)$-dimensionale skæringer $H \cap K$ for $K \in \mathcal{H}$ er ikke-tomme og i generel position som hyperplaner i H.*

Bevis. Antag først at $\mathcal{H} \cup \{H\}$ er i generel position. Idet $d \geq 2$, vil normalvektoren til H ikke være parallel med normalvektoren til noget $K \in \mathcal{H}$. Enhver skæring $H \cap K$ for $K \in \mathcal{H}$ vil derfor være ikke-tom og dermed vil $H \cap K$ være en $(d-2)$-dimensional hyperplan i H.

Vælg vilkårlige $k \leq d-1$ skæringer $H \cap K_1, \ldots, H \cap K_k$, og lad n_i være normalvektor til hyperplanen K_i. Lad h være normalvektor til H. De $k+1 \leq d$ normalvektorer $n_1, \ldots, n_k, h$ er da lineært uafhængige per antagelse. Projicerer vi n_i ned på H, får vi vektoren $\bar{n}_i$ der er normalvektor til $H \cap K_i$ som hyperplan i H. Projektionerne $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k$ er stadigt lineært uafhængige, for der er blot tale om første skridt i Gram-Schmidt-ortogonalisering hvor vi først ortogonaliserer med hensyn til h.

Betragt vilkårlige $d = (d-1)+1$ skæringer $H \cap K_1, \ldots, H \cap K_d$, og antag for modstrid at disse har et fælles punkt i H. I så fald vil $K_1, \ldots, K_d, H$ have et fælles punkt i $\mathbb{R}^d$ i modstrid med at $\mathcal{H} \cup \{H\}$ er i generel position. Vi har hermed vist lemmaets ene implikation.

Antag nu omvendt at $\mathcal{H}$ er i generel position i $\mathbb{R}^d$, og at skæringerne $H \cap K$ for $K \in \mathcal{H}$ er i generel position i H. Betragt vilkårlige

$k \leq d$ hyperplaner i den udvidede familie $\mathcal{H} \cup \{H\}$. Hvis H ikke er en af de valgte hyperplaner, ved vi at normalvektorerne er lineært uafhængige per antagelse. Alternativt ser vi altså på H samt $K_1, \ldots, K_{k-1}$. Som ovenfor lader vi n_i være normalvektor til K_i, sådan at projektionen af n_i på H vil være normalvektor $\bar{n}_i$ i H til skæringen $H \cap K_i$. Per antagelse er de $k-1 \leq d-1$ normalvektorer $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_{k-1}$ lineært uafhængige, og derfor er også $h, n_1, \ldots, n_{k-1}$ et sæt lineært uafhængige vektorer.

Tilsvarende, hvis der findes $d+1$ hyperplaner i $\mathcal{H} \cup \{H\}$ der har et punkt til fælles, så må H være en af disse hyperplaner, og resten kalder vi $K_1, \ldots, K_d$. Det samme skæringspunkt vil i så fald være et fælles punkt for $H \cap K_1, \ldots, H \cap K_d$ i modstrid med at de er i generel position i H. $\square$

Med lemmaet i hånden kan vi nu løse det stillede problem og få følgende sætning:

Sætning 4 *Lad $\mathbb{R}^d$ være opdelt af N hyperplaner $H_1, \ldots, H_N$. Det maksimale antal sektioner i opdelingen opnås hvis og kun hvis de N hyperplaner er i generel position. I så fald vil $\mathbb{R}^d$ være opdelt i netop*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{N+1}{d-2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{N}{d-i}$$

sektioner. Summerne er veldefinerede idet der kun er endeligt mange led forskellig fra nul.

Til præmieopgaven får vi svaret $\binom{N+1}{2} + \binom{N+1}{0} = \frac{(N+1)N}{2} + 1$, og til ekstraopgaven får vi svaret $\binom{N+1}{3} + \binom{N+1}{1} = \frac{(N+1)N(N-1)}{6} + N + 1$.

Bevis. For en familie $\mathcal{H}$ af hyperplaner i $\mathbb{R}^d$, lader vi $s_d(\mathcal{H})$ betegne antallet af sektioner hvis $\mathbb{R}^d$ opdeles med hyperplanerne fra $\mathcal{H}$. Vi definerer desuden $s_d(N)$ som den maksimale værdi af $s_d(\mathcal{H})$ for familier $\mathcal{H}$ bestående af N hyperplaner. Vi vil så bevise ved induktion efter dimensionen d (og sidenhen N) at $s_d(N)$ sektioner opnås netop når hyperplanerne er i generel position, og vi vil samtidig opstille en rekursionsformel for $s_d(N)$.

Indledningsvis bemærkes at $s_d(N)$ aldrig opnås af $\mathcal{H}$ hvis familien indeholder samme hyperplan to gange. I så fald kan vi fjerne en af dupletterne uden af ændre antallet af sektioner, og derefter tilføjer vi en hyperplan der skærer mindst én af sektionerne ikke-trivielt hvorved antallet af sektioner bliver skarpt større. Vi antager derfor herefter at alle familier af hyperplaner er fri for dupletter.

For $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ er hyperplaner blot kopier af $\mathbb{R}^0$, dvs. enkeltpunkter. Uanset valget af N (*forskellige*) punkter, bliver $\mathbb{R}$ inddelt i $N + 1$ intervaller, så $s_1(N) = N + 1$. En familie af N punkter/hyperplaner i $\mathbb{R}$ vil altid være i *generel position.*

Som degenereret tilfælde i dimension $d = 0$ betragter vi $\mathbb{R}^0$ hvilket er et enkelt punkt. Hyperplaner vil i så fald være kopier af den tomme mængde $\emptyset$, så uanset antallet af hyperplaner vil opdelingen have én sektion (bestående af ét punkt). Vi har derfor $s_0(N) = 1$ for alle $N \geq 0$, hvilket viser sig at passe fint med den rekursionsformel vi bestemmer nedenfor.

I dimension $d \geq 2$ antager vi per induktion at opgaven er løst for dimension $d - 1$. Påstanden for dimensionen d beviser vi så ved en yderligere induktion efter antallet N af hyperplaner: Den tomme familie $\emptyset$ af hyperplaner er i generel position og opdeler $\mathbb{R}^d$ i én sektion, dvs. $s_d(0) = 1$. Antag så at opgaven er løst for familier af $N - 1$ hyperplaner i $\mathbb{R}^d$, og betragt en vilkårlig familie $\mathcal{H}$ af N (forskellige) hyperplaner i $\mathbb{R}^d$. Lad $H_1, \ldots, H_N$ være hyperplanerne i $\mathcal{H}$.

Vi ser nu på familien $\mathcal{H}' := \mathcal{H}\backslash\{H_N\}$ hvor vi har fjernet én af hyperplanerne. Per induktion gælder derfor $s_d(\mathcal{H}') \leq s_d(N-1)$ med lighedstegn netop når $\mathcal{H}'$ er i generel position. Vi tilføjer så hyperplanen H_N igen og overvejer hvad der sker med antallet af sektioner. De andre hyperplaner skærer H_N i $H_N \cap H_1, \ldots, H_N \cap H_{N-1}$ der er $(d-2)$-dimensional hyperplaner i H_N – lad $\mathcal{H}''$ være familien af disse. $\mathcal{H}''$ opdeler H_N, og hver sektion i $\mathcal{H}''$-opdelingen er grænseflade mellem to sektioner i $\mathcal{H}$-opdelingen af $\mathbb{R}^d$.

To sektioner i $\mathcal{H}$-opdelingen der støder op til samme område af H_N, bliver til én sektion i $\mathcal{H}'$-opdelingen når H_N fjernes. Områderne i opdelingen af H_N svarer altså netop til de $\mathcal{H}'$-sektioner som H_N skærer, og der må derfor gælde at

$$\begin{aligned} s_d(\mathcal{H}) &= s_d(\mathcal{H}') + s_{d-1}(\mathcal{H}'') \\ &\leq s_d(N-1) + s_{d-1}(|\mathcal{H}''|) \leq s_d(N-1) + s_{d-1}(N-1). \end{aligned}$$

Per induktion efter både N (for $\mathcal{H}'$) og d (for $\mathcal{H}''$), gælder der lighedstegn netop hvis: $H_1, \ldots, H_{N-1}$ alle skærer H_N, $\mathcal{H}''$ er i generel position, og $\mathcal{H}'$ er i generel position. Ifølge lemmaet er det ækvivalent med at $\mathcal{H}$ er i generel position.

Såfremt $\mathcal{H}$ er i generel position, får vi desuden rekursionsformlen (der også gælder for $d = 1$)

$$s_d(N) = s_d(\mathcal{H}) = s_{d-1}(N-1) + s_d(N-1).$$

Tilbage står så at vise at

$$f_d(N) := \sum_{i=0}^{\infty} \binom{N+1}{d-2i}$$

opfylder samme rekursive betingelser:

$$\begin{aligned}
f_0(N) &= \binom{N+1}{0} = 1, \\
f_d(0) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1}{d-2i} = \binom{1}{d \bmod 2} = 1, \\
f_d(N) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{N+1}{d-2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\binom{N}{(d-1)-2i} + \binom{N}{d-2i} \right) \\
&= f_{d-1}(N-1) + f_d(N-1) \text{ for } d, N \geq 1.
\end{aligned}$$

Heraf følger at $s_d(N) = f_d(N)$ for alle $d, N \geq 0$ som ønsket. □