Cantors sætning v.2

Dan Saattrup Nielsen

De fleste af os kender Cantors sætning, som siger, at der ikke er nogen surjektiv afbildning fra en given mængde A til $\mathcal{P}(A)$, hvor $\mathcal{P}(A)$ er potensmængden af A. Ækvivalent kan det siges at $|\mathcal{P}(A)| > |A|$, hvor $|X|$ er kardinaliteten af X, som medfører $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. En generalisering af denne sætning vil her vises, som bevist af Julius König i den anden halvdel af det 19. århundrede. Først starter vi med en definition.

Definition 1 Givet et uendeligt kardinaltal λ, defineres *kofinaliteten* $cf(\lambda)$, til at være det mindste kardinaltal κ således, at der eksisterer en afbildning $f : \kappa \to \lambda$, som opfylder, at $\sup(f(\kappa)) = \lambda$.

Man kan se kofinaliteten som en form for størrelsesbetragtning. Som et eksempel vil $\aleph_\omega$, foreningen af de ω første uendelige kardinaltal $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$, virke uoverskueligt stort, og det vil være svært at have en intuition omkring størrelsesforskellen mellem $\aleph_\omega$ og $\aleph_{\omega+1}$ f.eks. Men da vi kan konstruere en funktion $f : \aleph_0 \to \aleph_\omega$ givet ved $f(n) := \aleph_n$, vil det netop være tilfældet at $\sup(f(\aleph_0)) = \aleph_\omega$, så $cf(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$; på den anden side kan nævnes at $cf(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$. Pludselig virker $\aleph_{\omega+1}$ derfor meget større end $\aleph_\omega$, som også afspejler sig ift. forskellige egenskaber ved de to, som vi dog ikke vil komme ind på her. Det bemærkes også at $cf(\lambda) \leq \lambda$, da vi altid som minimum kan tage identitetsafbildningen $f : \lambda \to \lambda$ med $\sup(f(\lambda)) = \lambda$. Vi kan herefter formulere sætningen som

Sætning 2 (Königs sætning) *Hvis λ er et uendeligt kardinaltal, gælder $\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$.*

Bevis. Lad $\kappa := cf(\lambda)$ og konstruér $f : \kappa \to \lambda$, så billedet af f er ubegrænset i λ. Betragt nu en arbitrær afbildning $G : \lambda \to {}^{\kappa}\lambda$.[1] Det er nok at vise, at G ikke er surjektiv. For alle $\alpha < \kappa$, lad

$$A_\alpha = \{G_\eta(\alpha) \mid \eta < f(\alpha)\}.$$

Da gælder det for alle $\alpha < \kappa$ at $A_\alpha \subseteq \lambda$ og $|A_\alpha| \leq f(\alpha) < \lambda$. Specielt gælder det for $\alpha < \kappa$ at $\lambda \backslash A_\alpha \neq \emptyset$. Definér nu $h(\alpha)$, til at være det mindste element af $\lambda \backslash A_\alpha$ for alle $\alpha < \kappa$. Da gælder det, for alle $\alpha < \kappa$ og $\eta < f(\alpha)$, at

$$h(\alpha) \neq G_\eta(\alpha).$$

Derudover ses det klart ud fra vores konstruktion af f, at der for enhvert $\eta < \lambda$ findes et $\alpha < \kappa$ således at $\eta < f(\alpha)$. Derfor gælder det, at $h \neq G_\eta$, for alle $\eta < \lambda$. Altså er G ikke surjektiv, og $|{}^{\kappa}\lambda| > |\lambda|$. Men da κ var defineret til at være $cf(\lambda)$, samt at $|{}^{cf(\lambda)}\lambda| = |\lambda|^{|cf(\lambda)|}$ ved hjælp af kardinaltalsregning, fås at $|\lambda|^{|cf(\lambda)|} > |\lambda|$. Men da λ og $cf(\lambda)$ begge er kardinaltal, gælder $|\lambda| = \lambda$ og $|cf(\lambda)| = cf(\lambda)$, så vi har at $\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$. □

Korollar 3 *Hvis κ er et uendeligt kardinaltal, gælder $cf(2^\kappa) > \kappa$.*

Bevis. Benyt König's sætning med $\lambda := 2^\kappa$, til at få uligheden

$$(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa.$$

Men, hvis $\mu \leq \kappa$, gælder det at

$$(2^\kappa)^\mu = 2^{\kappa \otimes \mu} = 2^\kappa,$$

hvor regneregler for kardinaltal blev benyttet undervejs. Dette medfører, at $cf(2^\kappa) \not\leq \kappa$, som dermed giver $cf(2^\kappa) > \kappa$, fordi ordinaltallene er totalt ordnede. □

[1] ${}^{\kappa}\lambda$ er mængden af funktioner fra κ til λ.

Hermed kan Cantors sætning bevises, som et korollar.

Korollar 4 (Cantors sætning) $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ *for alle mængder* A.

Bevis. Det er klart for endelige A, så antag A er uendelig. Lad $\kappa := |A|$. Da det vides, at $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$ og, at det per definition gælder, at $2^\kappa \geq cf(2^\kappa)$, fås, ved brug af Korollar 3, at

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa \geq cf(2^\kappa) > \kappa = |A|.$$

□

Litteratur

[1] Schimmerling, Ernest. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 2011.