Ultrafiltre og umulighed

Martin Speirs

Arrows umulighedssætning fortolkes som et udsagn om at en bestemt klasse af funktioner er tom, og et bevis ved hjælp af ultrafiltre gives.

Fælles prioritering

I et demokrati er vi (ideelt set) alle med til at bestemme. Men det er ikke altid vi kan blive enige. Så må man prøve at finde en *fair* måde at træffe beslutninger. Hvis man for eksempel skal fordele penge ud i samfundet kan det være svært at blive enige. Nogle vil prioritere SU højere end offentlig transport, og prioritere disse højere end ældrepleje. Andre vil mene at den omvendte prioritering er den bedste.

Den amerikanske økonom Kenneth Arrow viste i 1950 at der ikke findes nogen *fair* måde hvorpå en masse prioriteringer kan samles sammen til én fælles prioritering[2]. Denne artikel giver et bevis af en version af Arrows umulighedssætning.

En vigtig antagelse er at der skal prioriteres mellem mindst tre alternativer. Det vil sige, der er ikke tale om en afstemning mellem to kandidater f.eks. Obama vs. Romney.

En fælles prioritering siges at være **fair** hvis den opflyder følgende krav.

Ingen diktator: Der er ikke én person som altid bestemmer.

Pareto efficiens: Hvis alle vælgerene er enige om prioriteringen af to af alternativerne så skal den endelige beslutning

[2]Se [Arrow] for Arrows egne udgave af emnet. Se [Geanakoplos] for tre korte beviser af sætningen.

respektere dette.

Uafhængighed af irrelevante alternativer: Den endelige prioritering blandt to af alternativerne må kun afhænge af vælgerenes prioriteringer af disse to alternativer. F.eks. må valget mellem $a > b$ eller $b > a$ ikke afhænge af c's placering i ordningen.

Upartisk: Alle alternativerne $a, b, c, \ldots$ behandles på lige fod. Dvs. den fælles prioritering ændres ikke hvis vi permuterer alternativerne[3].

Det virker som fire rimelige krav at stille når man gerne vil "aggregere folks præferencer" som en økonom nok ville sige. Men ak! Arrows sætning siger at der ikke findes nogen fair fælles prioritering.

Condorcets eksempel

"Condorcets paradoks" er et godt eksempel på besværligheden ved at tælle stemmer på en fair måde. Antag at samfundet har tre borgere $\{1, 2, 3\}$ og de skal vælge mellem tre alternativer $\{a, b, c\}$. Lad P_1, P_2, P_3 være prioriteringerne som hhv. borger $1, 2$ og 3 vælger. For eksempel kunne vi have

$$\begin{aligned} P_1 : &\qquad a > b > c \\ P_2 : &\qquad b > c > a \\ P_3 : &\qquad c > a > b \end{aligned}$$

Hvordan skal stemmerne tælles op? Man kunne argumentere for at a burde være prioriteret højere end b siden to ud af tre vælgere

[3] Her følger vi Terence Tao i hans korte artikel [Tao] om Arrows sætning. Denne antagelse er ikke strengt nødvendig, men gør beviset noget enklere

mener $a > b$. Men ligeledes finder man at $b > c$ og at $c > a$. Men så får vi jo $a > b > c > a$ altså er ordningen slet ikke en ordning!

Setuppet og sætningen

Lad os nu vende tilbage til formuleringen af Arrows resultat. Givet en endelig mængde af alternativer A, med mindst tre elementer, er en **prioritering** af A en total ordning af A. Mængden af mulige prioriteringer er altså mængden af totale ordninger af A. Denne mængde betegnes $T(A)$. En prioritering $P \in T(A)$ ser således ud:

$$P : \qquad a_1 > a_2 > \cdots > a_k.$$

Lad N være et naturligt tal som betegner antallet af vælgere. En funktion

$$f : T(A)^N \longrightarrow T(A)$$

tager en "afstemning" $(P_1, \ldots, P_n) \in T(A)^N$ og giver en fælles beslutning, $P = f(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)$. Funktionen f kaldes **fair** hvis den tilfredstiller følgende krav:

Ingen diktator: Der findes ingen koordinat $1 \le i \le N$ således at $f(P_1, \ldots, P_N) = P_i$ for alle $(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)^N$.
Pareto efficiens: Hvis der for $(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)^N$ og $a, b \in A$ gælder at $a > b$ i for alle ordningerne $P_1, \ldots, P_N$, så gælder der også at $a > b$ i ordningen $P = f(P_1, \ldots, P_N)$.
Uafhængighed af irrelevante alternativer: Givet $a, b \in A$ og $(P_1, \ldots, P_N), (Q_1, \ldots, Q_N) \in T(A)^N$ således at, for alle $i = 1, \ldots, N$, er P_i og Q_i enige om ordningen af a og b, så er $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ og $Q = f(Q_1, \ldots, Q_N)$ også enige omkring ordningen af a og b.
Upartisk: f er invariant under alle permutationer af mængden A.

Bemærk at hvis f er Pareto efficient så er f automatisk surjektiv. Dette giver god mening: hvis alle er enige om en prioritering P så må det helst være tilfældet at $f(P, \ldots, P) = P$.

Vi kan nu formulere Arrows sætning.

Sætning 1 (Arrow 1950) *Der findes ingen fair funktion*

$$f : T(A)^N \longrightarrow T(A).$$

Beviset er ikke svært og kan findes mange steder, f.eks. i [Geanakoplos]. Men, det kan være lidt forvirrende. Hovedidéen med denne artikel er at se hvordan ultrafilter-maskineriet kan bruges til at bevise Arrows umulighedssætning.

Ultrafiltre

Et "ultrafilter" lyder dyrt! De bedste koster skam også en svag udgave af udvalgsaksiomet.

Lad I være en mængde og $\mathcal{P}(I)$ være potensmængden af I. Et **filter** på I er en delmængde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(I)$ således at

- $\emptyset \notin \mathcal{D}$ og $I \in \mathcal{D}$.
- Hvis $X, Y \in \mathcal{D}$ så er $X \cap Y \in \mathcal{D}$.
- Hvis $X \in \mathcal{D}$ og $X \subseteq Y \subseteq I$ så er $Y \in \mathcal{D}$.

Et filter på I kan med fordel tænkes på som en specifikation af de "store" delmængder af I. Under den fortolkning synes aksiomerne at være rimelige.

Bemærk at ethvert filter har følgende vigtige egenskab: Hvis $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$ gælder der at $X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$. Dette følger umiddelbart af de to første aksiomer.

Et **ultrafilter** på I er et filter som tilmed har følgende egenskab

- For enhver delmængde $X \subseteq I$ gælder enten at $X \in \mathcal{D}$ eller $I \setminus X \in \mathcal{D}$.

Et ultrafilter er altså et filter der, for hver delmængde $X \subseteq I$, tager stilling til om X eller $I \setminus X$ er "stor".

Eksempel 2 Enhver delmængde $X \subseteq I$ frembringer et filter

$$\langle X \rangle := \{Y \subseteq I : X \subseteq Y\}.$$

Et filter af denne form kaldes for et **principalfilter**.

Principalfiltre er ret kedelige. De siger ikke andet end at mængden X er "stor". Det giver ikke særligt meget information[4]. Hvis mængden I er uendelig findes der altid et filter på I som ikke er et principalfilter.

Eksempel 3 Lad $\mathcal{D} := \{X \subseteq I : I \setminus X \text{ er endelig}\}$. $\mathcal{D}$ kaldes for det **kofinite** filter på I og er ikke et principalfilter. Det er dog heller ikke et ultrafilter.

Sætning 4 *Lad I være en uendelig mængde. Da findes en udvidelse af det kofinite filter som gør det til et ultrafilter.*

Et par ord om beviset: Det viser sig at et ultrafilter er et filter som er maksimalt i den forstand at det ikke er indeholdt i noget andet filter. Ved brug af udvalgsaksiomet (i form af Zorns lemma) kan man altid finde en maksimal udvidelse af det kofinite filter.

En vigtig pointe med hensyn til Arrows sætning er følgende lemma.

[4] En præcisering af dette meget løse udsagn for dem der kender til modelteori: I modelteori bruger man ultrafiltre til at konstruere nye modeler, såkaldte ultraprodukter. For hvert ultrafilter kan man konstruere et ultraprodukt. Begynder man med et ultrafilter som er et principalfilter frembragt af $\{i\}$ ender man (op til isomorfi) blot med den i'te model.

Lemma 5 *Ethvert ultrafilter $\mathcal{D}$ på en* endelig *mængde I er et principalfilter. Envidere er $\mathcal{D}$ frembragt af en et-punktst mængde, dvs. $\mathcal{D} = \langle\{i\}\rangle$ for et $i \in I$.*

Bevis. Hvis vi kan vise at der er ét element $i \in I$ således at $\{i\} \in \mathcal{D}$ da må $\mathcal{D} = \langle\{i\}\rangle$. Dette er fordi hvis $X \in \mathcal{D}$ så må $X \cap \{i\}$ være i $\mathcal{D}$, men $\emptyset \notin \mathcal{D}$ så $X \cap \{i\} = \{i\}$. Med andre ord $\{i\} \subseteq X$.

Antag at $\mathcal{D}$ ikke er et principalfilter. Så for all $i \in I$ gælder der at $\{i\} \notin \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ er et ultrafilter må $I \setminus \{i\}$ være i $\mathcal{D}$. Men dette gælder for alle de *endeligt* mange elementer $i \in I$. Så

$$\bigcap_{i \in I} I \setminus \{i\} = \emptyset \in \mathcal{D}$$

hvilket er en modstrid. Altså må $\mathcal{D}$ være et principalfilter.

Slutteligt skal vi vise at $\mathcal{D}$ er frembragt af en et-punktsmængde $\{i\}$. Lad $\mathcal{D} = \langle Y\rangle$, og antag at $i, j \in Y$ er forskellige. Se nu på mængden $\{i\} \subseteq I$. Da hverken $\{i\}$ eller $I \setminus \{i\}$ indeholder Y er de ikke medlemmer af $\mathcal{D} = \langle Y\rangle$. Men det er i modstrid med antagelsen om at $\mathcal{D}$ er et *ultra*filter[5]. □

Vi har nu nok værktøj til at bevise Arrows sætning og for den sags skyld til at gøre en masse andre spændende ting!

Beviset for Arrows sætning

Lad os sige at en funktion $f : T(A)^N \longrightarrow T(A)$ er **pseudo-fair** hvis den opfylder alle krav for en fair funktion, bortset fra

[5] Bemærk at anden del af lemmaet ikke afhænger af at I er endelig. Dvs. ethvert ultrafilter som er et principalfilter må være frembragt af en et-punktsmængde, også selvom I er uendelig.

diktatorkravet. Dvs. f er Pareto efficient, har ufhængighed af irrelevante alternativer og er invariant under alle permutationer af A, men det kan ske at der findes en diktator. Strategien for beviset vil være at vise at f *må* have en diktator.

Lad nu f være en vilkårlig pseudofair funktion. Betragt mængden $I_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ af vælgere. En delmængde $X_{a/b} \in \mathcal{P}(I_N)$ vil siges at være en **koalition for a over b** hvis

- hver gang alle prioriteringerne P_i for medlemmerne $i \in X_{a/b}$ enstemmigt vælger $a > b$ så vil $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også have $a > b$.

En koalition for a over b kan altså tvinge den fælles prioritering med hensyn til a og b.

Lemma 6 *Hvis X er en koalition for a over b så er X en koalition for c over d for alle andre elementer $c, d \in A$.*

Bevis. Antag gerne at alle P_i for $i \in X$ vælger $c > d$. Vi skal vise at $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også prioriterer $c > d$. Da f er upartisk er f invariant overfor permutationen der bytter hhv. a med c, og b med d, og alt andet forbliver som det er. Da X er en koalition for a over b ser vi at $a > b$ og dermed at $c > d$ tvinges for P. □

Lemmaet betyder at en koalition X altid kan afgøre valget hvis $P_i = P_j$ for all $i, j \in X$. Vi siger nu at X er en **koalition** hvis X er en koalition for a over b ($a, b \in A$).

Lad $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(I_N)$ være samlingen af alle koalitioner. Bemærk at $\mathcal{D}$ afhænger af funktionen f.

Lemma 7 *$\emptyset \notin \mathcal{D}$ og $I_N \in \mathcal{D}$. Hvis $X \in \mathcal{D}$ og $X \subseteq Y \subseteq I_N$ så er $Y \in \mathcal{D}$.*

Bevis. Følger umiddelbart af at f er Pareto efficient. □

Lemma 8 *Hvis X og Y tilhører $\mathcal{D}$ så tilhører $X \cap Y$ også $\mathcal{D}$.*

Bevis. Vælg tre alternativer, a, b og c fra A. Antag gerne at P_i for alle $i \in X \cap Y$ enstemmigt vælger $a > b$ og at alle andre P_j for $j \notin X \cap Y$ vælger $b > a$. Vi skal altså vise at $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også prioriterer $a > b$.

Da f er pseudofair er den specielt uafhængig af irrelevante alternativer. Så c's placering i $P_1, \ldots, P_N$ har ingen inflydelse på hvorvidt $a > b$ eller $b > a$ i den samlede $P = f(P_1, \ldots, P_N)$. Antag derfor gerne at alle medlemmerne af X vælger $a > c$. Antag videre at alle medlemmer i Y vælger $c > b$. Da $X \in \mathcal{D}$ må $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ nødvendigvis vælge $a > c$. Ligelede må P nødvendigvis vælge $c > b$ da $Y \in \mathcal{D}$. Men da P er en ordning gælder der så at $a > c > b$. Specielt har vi $a > b$. Så $X \cap Y \in \mathcal{D}$. □

Lemma 9 *Hvis $X \subseteq I_N$ da er enten X eller $I_N \setminus X$ et element i $\mathcal{D}$.*

Bevis. Antag $I_N \setminus X \notin \mathcal{D}$. Dvs. at selv hvis alle medlemmer $j \in I_N \setminus X$ prioriterer på samme måde så kan medlemmerne af X tvinge en anden prioritering. Men det betyder netop at $X \in \mathcal{D}$. □

Af de ovenstående tre lemmaer følger nu:

Sætning 10 *$\mathcal{D}$ er et ultrafilter på I_N.*

Korollar 11 (Arrows umulighedssætning) *Hvis f er pseudofair da er f ikke fair.*

Bevis. Vi ved fra Sætning 10 at $\mathcal{D}$ er et ultrafilter på I_N. Da mængden I_N er endelig ved vi fra Lemma 5 at $\mathcal{D}$ er et principalfilter frembragt af en person $i \in I_N$. Dvs. at $\{i\}$ udgør en koalition, og dermed er i en diktator. $\square$

Afslutning og afveje

Den samfundsmæssige fortolkningen af Arrows sætning i forhold til (u)muligheden for en fair aggregering af folks præferencer giver naturligvis anledning til en masse andre spørgsmål. Nogle af disse spørgsmål studeres indenfor den såkaldte "social choice theory".

Til sidst bør det nævnes at ultrafiltrets *raison d'être* er mere end bare at give et noget højniveau bevis for Arrows sætning. Ultrafiltre kan bruges til at give et mere konceptuelt bevis for kompakthedssætningen i modelteori. De kan bruges til at formalisere Leibniz' udgave af infinitisimalkalkulen således at $\frac{dx}{dy}$ rent faktisk er en brøk. Ifølge MathOverflow (`mathoverflow.net/`) spiller de endda en rolle i geometrisk gruppeteori i forbindelse med amenable grupper!

En stor del af denne artikel er inspireret af Wikipedias artikel om Arrows sætning. Ideen til det vigtige Lemma 8 kommer fra Taos lille notat [Tao]. For en god og spændende introduktion til ultrafiltre og ultraprodukter se [Eklof]. [6]

[6] Mange tak til Frederik Möllerström Lauridsen for ideer, nærlæsning, korrektur og foreslag til forbedringer! Alle de resterende mangler og fejl er selvfølgelig mine egne.

Litteratur

[Tao] Tao, Terence. *Arrow's Theorem*, math.ucla.edu/~tao/arrow.pdf.

[Eklof] Eklof, Paul C. *Ultraproducts for Algebraists*, fra *Handbook of Mathematical Logic* (ed. J. Barwise) North-Holland Pub. 1977

[Arrow] Arrow, Kenneth J. *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*, udgivet i *The Journal of Political Economy* Vol. 58, No. 4, 1950

[Geanakoplos] Geanakoplos, John. *Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem*, Cowles Foundation for Research in Economics, Paper No. 1116., Yale Uni. 2005