

Løsning på sidste bloks præmieopgave

Janus Rønn Lind

Opgaven: Du har brug for en pakke smøger og betaler med 8 mønter, hvoraf netop én er falsk og dermed vejer mindre end en ægte mønt. Kantinedamen fatter mistanke om, at den ene mønt er falsk. Hun har en vægt med to skåle, som kan vise hende, hvilken skål har det tungeste indhold. Kan kantinedamen finde den falske mønt ved at veje kun to gange? Kunne hun gøre det samme, hvis smøgerne havde kostet hhv. 9 eller 10 mønter?

Givet 3 mønter, hvor kantinedamen ved, at den ene er falsk, kan hun med én vejning identificere den falske mønt: Først vælger hun to vilkårlige mønter, og sammenligner deres vægt. Vejer de ikke det samme, kan hun uden videre udpege den letteste af mønterne som falsk. Vejer de det samme, må den tredje mønt være falsk.

Det er klart, at hun efter vejningen ikke må risikere at stå med en bunke, som indeholder 2 eller flere mønter, hvis ægthed hun ikke har bestemt. Hun kan derfor ikke være sikker på at finde den falske mønt med én vejning, hvis der er 4 eller flere mønter, da der ifølge skuffeprikket vil være 2 eller flere mønter i enten vægtskålene eller i rest-bunken.

Givet 8 mønter, hvoraf netop én er falsk, kan hun vælge 2 bunker med 3 mønter i hver og ved vejning bestemme, om den falske mønt er i én af de to bunker. Er den det, kan hun finde den falske mønt med metoden beskrevet ovenfor. Vejer de lige meget,

må den falske mønt være blandt de resterende to mønter, og den kan dermed findes ved vejning. Svaret på første del af opgaven er altså: Ja!

Givet 9 mønter kan hun naturligvis igen dele mønterne i 3 bunker med 3 mønter i hver. Den eneste forskel fra tilfældet med 8 mønter er, at hun nu risikerer at have 3 mønter tilbage, hvis de to bunker, hun vejer, vejer det samme. Igen kan hun bruge metoden beskrevet ovenfor og finde den falske mønt blandt de tre resterende mønter.

Givet 10 mønter, kan hun ikke være sikker på at finde den falske mønt med 2 vejninger. Ved hver vejning (af to lige store bunker mønter) bestemmer hun jo, om den falske mønt ligger i den ene bunke, den anden bunke eller blandt de resterende mønter. Hun bliver altså (igen jvf. skuffeprincippet) nødt til at have mere end 3 mønter enten på vægtskålene eller i rest-bunken. (Generelt kan hun altså med sikkerhed finde den falske mønt blandt op til $3m$ mønter ved hjælp af m vejninger).

Bemærkning fra redaktionen:

Vores lidt vage formulering af opgaven tillader også den tolking, at kantinedamen ikke på forhånd er sikker på eksistensen af en falsk mønt. I dette tilfælde giver ovenstående metode både svar på, om der er en falsk mønt blandt de 8 og i så fald hvilken. For 9 mønter eller derover vil der være over 10 muligheder, mens to vejninger som bemærket ovenfor kun giver 9 mulige udfald, så her skal hun på forhånd vide, at der er en falsk mønt.