Viètes formel

Jens Siegstad

Vi skal i denne artikel vise Viètes formel.

Theorem 1 *(Viètes formel)*

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}\end{aligned}$$

hvor $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ *for* $n > 1$ *og* $a_1 = \sqrt{2}$.

Ovenstående formel blev vist i 1593 af Francois Viète (1540-1603). Formlen er interessant idet den er det første eksempel på et uendeligt produkt og derudover også er den første formel til at udregne π (kilde [1]). Viète gav et rent geometrisk bevis hvor han sammenlignede arealer af regulære polygoner, med hhv. 2^n og 2^{n+1} sider, indskrevet i en cirkel. For typer med hang til klassisk geometri anbefales det at kaste et blik på de sidste sider i kapitel 16 i [2] hvor man vha. en række opgaver guides til et geometrisk bevis der er tættere på Viètes oprindelige bevis. Derudover findes der i førnævnte kapitel et bevis for at π er irrational[1]. For de læsere der ikke før har stiftet bekendtskab med uendelige produkter vil vi i det følgende definere konvergens af et uendeligt produkt.

[1] I Famøs 22-2 kan du ligeledes finde et bevis for irrationalitet af π.

Definition 2 Lad (u_n) være en følge af komplekse tal. Betragt følgen af partielle produkter

$$p_n = u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{j=1}^{n} u_j.$$

Hvis følgen (p_n) har en grænseværdi, forskellig fra nul, når $n \to \infty$ da siger vi at det uendelige produkt $\prod_{j=1}^{n} u_j$ er konvergent med værdi p og vi skriver da at

$$p = \prod_{j=1}^{\infty} u_j.$$

Hvis et uendeligt produkt ikke er konvergent kaldes det divergent.

Inden vi viser Viètes formel viser vi et par påstande som viser sig at være pænt anvendelige i beviset for denne ædle formel.
Påstand 1

$$\sin x = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Bevis. Ved gentagen anvendelse af halveringsformlen for sinus finder vi at

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\vdots \\
&= 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

som ønsket. Nøjeregnende typer gennemfører naturligvis et induktionsbevis[2]. □

Påstand 2
Der gælder at

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Bevis. Vi viser først at

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

Vi ved at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Derved finder vi at

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1.$$

Heraf følger det at

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

Ved at kombinere ovenstående med Påstand 1 finder vi at

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \tag{1}$$

som ønsket. □

[2]En frisk indføring i induktionsbeviser med udgangspunkt i *Caféen? Domino* kan du finde i FAMØS 22-1.

Sætter vi $x = \frac{\pi}{2}$ i (1) finder vi at

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right)\cdot\ldots$$

Ved at bruge den trigonometriske additionsformel for cosinus samt idiotformlen vises det let at

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

for alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Specielt haves at

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ved at indsætte ovenstående værdier i (1) fås Viètes formel. Fedt nok! Et godt spørgsmål er så hvor hurtigt det uendelige produkt i Viètes formel konvergerer. Det konvergerer rent faktisk pænt hurtigt. Mere præcist gælder følgende

Theorem 3 *Definer følgen*

$$v_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right).$$

Da gælder der at

$$0 < v_n - \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{48}}\sqrt{2}\pi^2\frac{1}{4^n} < \frac{3}{10}\frac{1}{4^n}.$$

Bevis. Se side i 144 i [3]. □

Betragtes værdierne af følgen $(2v_n^{-1})$ får man for $n = 21$ en værdi af π som er korrekt til 12. decimal (se s. 145 i [3]). Vi har således fundet en metode til at udregne π som er ret så effektiv. Ulempen er dog at man skal udregne ret så mange kvadratrødder, hvilket typisk vil være ret så trælst hvis man sidder på en øde ø uden strøm på computeren! Lad os sammenligne med 2 af de vel nok mest kendte rækkefremstillinger for π. Vi betragter først Leibniz's formel

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ovenstående formel kan geometrisk fortolkes således: En fjerdedel af forholdet mellem omkreds og diameter er det samme som summen af de reciprokke ulige tal med alternerende fortegn. En anden kendt rækkefremstilling der involverer π er Eulers række

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ovenstående rækkefremstilling udtrykker at summen af alle de reciprokke kvadrattal er endelig. Vi minder om at summen af de reciprokke naturlige tal samt summen af alle de reciprokke primtal er uendelig. Nok er der uendeligt mange kvadrattal, men de fordeler sig mindre tæt blandt de reelle tal end de naturlige tal samt primtallene. Begge disse formler har den umiddelbare fordel at de er relativt nemme at huske, fortolke og ikke mindst at vise. De har dog den umiddelbare ulempe at de konvergerer meget langsomt. For Leibniz's række gælder at, hvis man skal udregne π således at afvigelsen er af størrelsesordenen 10^{-k}, skal man medtage ca $\frac{1}{4}10^k$ led (se s 144 i [3]) og for Eulers række skal man medtage omkring omkring 100 millioner led for at finde en værdi af π der er korrekt op til 7 decimalers nøjagtighed (se s 148 i [3]). Skal man vha. computerkraft udregne π med drabeligt mange decimaler skal man have fat i nogle langt mere “harske” rækker. En af de hurtigt konvergerende rækkefremstillinger er Ramanujan[3]s rækkefremstilling

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}.$$

Puha!

Litteratur

[1] Kent E. Morrison *Cosine Products, Fourier Transforms, and Random Sum.* Amer. Math. Monthly, 102, 1995, 716-724

[2] Michael Spivak. *Calculus.* Third Edition, Publish or Perish Inc 1994.
Bogen kan findes her http://staff.washington.edu/freitz/Spivak_3rd_ed.pdf

[3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M.Koecher, K.Mainzer, J.Neukirch, A.Prestel, R.Remmert.*Numbers.*,Springer 1991.

[3]Srinivasa Ramanujan (1887-1920): Relativt habil indisk matematiker!

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_of_%CF%80