Sidste bloks præmie- og ekstraopgave

Nilin Abrahamsen

Tusind tak til Thor Baatrup Kampmann, Sune Precht Reeh og Jesper Baldtzer Liisberg for deres flotte besvarelser af sidste bloks præmieopgave! Til Jesper vanker et gavekort til GAMES. Mange tak også til Sune for hans løsning af ekstraopgaven. Inden vi går i gang med at mæske os i Sunes løsninger kan vi lige minde os selv om ordlyden af de to opgaver:

Sidste bloks præmieopgave (23. årgang nr. 3)

De reelle tal x, y, z opfylder:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 7 \end{aligned}$$

Hvad er $x^4 + y^4 + z^4$?

Se næste side for ekstraopgaven, der for øvrigt opstod som en misforståelse af en opgave i kurset *differentialligninger*.

Sidste bloks ekstraopgave (23. årgang nr. 3)

Vi siger, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til den ***autonome*** *differentialligning*

$$x' = v(x) \tag{1}$$

hvis $f'(t) = v(f(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Sætning 1 *Hvis $v \in C^1$ (dvs. kontinuert differentiabel) på $f(\mathbb{R})$, så er to forskellige løsninger f og g til (1) faktisk forskellige i hvert eneste punkt t.*

Således løser $f(t) = t^3$ ikke (1) hvis $v \in C^1(\mathbb{R})$, for så skulle funktionen $g(t) = 0$ også løse (1), og de to ville være sammenfaldende i $t = 0$ i modstrid med sætningen.

Spørgsmål: *Hvilke begrænsede funktioner på $\mathbb{R}$ er løsning til en ligning som (1), hvor v er C^1 på* ***hele*** *$\mathbb{R}$?*

Du kan nøjes med at betragte $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.