Løsning af præmie- og ekstraopgave fra Famøs årgang 23, nr. 3

Sune Precht Reeh

Løsning af præmieopgaven

Et polynomium i n variable $p(x_1, \dots, x_n)$ er *symmetrisk* hvis enhver ombytning af de variable i p giver det samme polynomium p som vi startede med. F.eks. er $x^2 + y^2 + z^2$ symmetrisk i tre variable, mens $x^2 + y + z$ ikke er symmetrisk.

En speciel familie af symmetriske polynomier er de såkaldte *elementarsymmetriske* polynomier i n variable. For n faste variable er der n elementarsymmetriske polynomier $e_1, \dots, e_n$ som er defineret ved

$$e_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

For at danne e_k tager vi således hvert produkt af k af de variable og lægger alle produkterne sammen. Polynomiet e_k er oplagt symmetrisk i de n variable.

Eksempel 1 Med tre variable x, y, z har vi de følgende tre elementarsymmetriske polynomier: $e_1(x, y, z) = x + y + z$, $e_2(x, y, z) = xy + xz + yz$ og $e_3(x, y, z) = xyz$.

De elementarsymmetriske polynomier er gode at kende, idet en velkendt[8] sætning om symmetriske polynomier siger:

Sætning 2 *Ethvert symmetrisk polynomium i n-variable kan på entydig måde udtrykkes som et polynomium med hensyn til de elementarsymmetriske $e_1, \ldots, e_n$.*

Hvis p er symmetrisk i n variable, findes altså et andet (ikke nødvendigvis symmestrisk) polynomium q i n variable sådan at

$$p = q(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Når man skal løse en opgave med symmetiske polynomier er det derfor typisk nok at opskrive alle udtryk ved hjælp af de elementarsymmetriske polynomier.

Eksempel 3 (generel løsning af præmieopgaven) I formuleringen af præmieopgaven indgår fire polynomier, lad os kalde dem $p_1, \ldots, p_4$, hvor $p_k(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$. De fire polynomier er alle symmetriske.

Vi har med det samme at $p_1 = e_1$. Hvis vi dernæst udregner $(e_1)^2$, får vi

$$(e_1)^2 = (x + y + z)^2 = p_2 + 2e_2$$

og altså $p_2 = (e_1)^2 - 2e_2$ eller $e_2 = \frac{1}{2}(p_1)^2 - \frac{1}{2}p_2$.

[8] Wikipedia har på nuværende tidspunkt, d. 28/3 2014, intet mindre end tre forskellige beviser for sætningen. Se http://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_symmetric_polynomial

Hvis man husker sin Pascals pyramide[9], så er

$$
\begin{aligned}
(e_1)^3 &= (x+y+z)^3 \\
&= (x^3+y^3+z^3) + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) \\
&\quad + 6xyz \\
&= p_3 + 3e_1e_2 - 3e_3.
\end{aligned}
$$

Dermed er $p_3 = (e_1)^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$, eller alternativt

$$e_3 = \tfrac{1}{3}p_3 - \tfrac{1}{3}(e_1)^3 + e_1e_2 = \tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{6}(p_1)^3 - \tfrac{1}{2}p_1p_2.$$

Til sidst ser vi på $(e_1)^4$ hvor vi (med nogle mellemregninger i hånden) får

$$(e_1)^4 = p_4 + 4e_2(e_1)^2 - 4e_3e_1 - 2(e_2)^2.$$

Nu isolerer vi p_4 og indsætter vores tidligere udregninger:

$$
\begin{aligned}
p_4 &= (e_1)^4 - 4e_2(e_1)^2 + 4e_3e_1 + 2(e_2)^2 \\
&= (p_1)^4 - 4(\tfrac{1}{2}(p_1)^2 - \tfrac{1}{2}p_2)(p_1)^2 \\
&\qquad + 4(\tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{6}(p_1)^3 - \tfrac{1}{2}p_1p_2)p_1 \\
&\qquad + 2(\tfrac{1}{2}(p_1)^2 - \tfrac{1}{2}p_2)^2 \\
&= \tfrac{1}{6}(p_1)^4 - (p_1)^2p_2 + \tfrac{4}{3}p_1p_3 + \tfrac{1}{2}(p_2)^2.
\end{aligned}
$$

I opgaven ved vi nu at der for x, y, z gælder at $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ og $p_3 = 7$. Vi indsættelse ovenfor får vi dermed

$$p_4 = \tfrac{1}{6} \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 5 + \tfrac{4}{3} \cdot 3 \cdot 7 + \tfrac{1}{2} \cdot 5^2 = 9.$$

[9] Ligesom Pascals trekant, bare for udregning af $(x+y+z)^k$ i stedet for $(x+y)^k$.

Løsning af ekstraopgaven

Antag først at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til differentialligningen $x' = v(x)$, dvs. $f'(t) = v(f(t))$ for alle $t \in R$, for passende valg af C^1-funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hvis dette skal give mening, må f i det mindste antages at være differentiabel.[10] Antag desuden at f er begrænset.

Udtrykket $v(f(t))$ er en sammensætning af to differentiable funktioner, og er derfor differentiabelt med hensyn til t i ethvert punkt. Funktionen f er altså 2 gange differentiabel, med

$$f''(t) = v'(f(t)) \cdot f'(t)$$

for alle $t \in R$. Da f' er differentiabel, er f' også kontinuert, så højresiden ovenfor er et produkt af kontinuerte udtryk; f er således en C^2-funktion.

Hvis der på noget tidspunkt gælder $f'(t_0) = 0$, så er $v(f(t_0)) = 0$, og dermed vil den konstante funktion $t \mapsto f(t_0)$ være løsning for samme v som f, og de to funktioner har punktet $(t_0, f(t_0)$ til fælles. Per entydighedssætningen i opgaven vil forskellige løsninger (for et givet valg af v) være forskellige i ethvert punkt. Den eneste mulighed er dermed at f er lig den konstante funktion $f(t) = f(t_0)$ overalt.

De konstante funktioner $t \mapsto a$ vil omvendt altid løse differentialligningen hvor $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er nulfunktionen $v(x) = 0$.

Vi antager derfor herefter at f ikke er konstant, og dermed at $f'(t) \neq 0$ overalt. Idet f' er kontinuert, må der således gælde at $f'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$ eller $f'(t) < 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Lad os betragte tilfældet $f'(t) > 0$ idet det andet tilfælde behandles analogt.

[10] Opgaven tillader godt nok at vi antager at f er C^∞, men hvor er det sjove i det?

Funktionen f er begrænset, så både $a := \inf f(\mathbb{R})$ og $b := \sup f(\mathbb{R})$ definerer reelle tal. Fordi f er strengt voksende, ved vi desuden at

$$a = \lim_{t\to-\infty} f(t), \qquad \text{og} \qquad b = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Da v er antaget at være C^1 på hele $\mathbb{R}$, har vi yderligere grænseværdier:

$$f'(t) = v(f(t)) \to \begin{cases} v(a) \\ v(b) \end{cases} \quad \text{for } t \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}$$

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = v'(f(t)) \to \begin{cases} v'(a) \\ v'(b) \end{cases} \quad \text{for } t \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}$$

Da f er begrænset, må det desuden gælde at $f'(t)$ rent faktisk går mod 0 for $t \to \pm\infty$, dvs. at $v(a) = v(b) = 0$.

Vi påstår nu at vi har fundet de egenskaber der kendetegner en løsning f. Lad os derfor antage at vi er givet en vilkårligt funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder følgende krav:

Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er begrænset C^2-funktion, og $f'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Der gælder $\lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$ og begge grænseværdier

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{f''(t)}{f'(t)} \quad \textit{og} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f''(t)}{f'(t)}$$

eksisterer og er endelige.

Vi viser nu at under disse antagelser om f, vil f være en løsning til differentialligningen for passende valg af C^1-funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

For det første, idet f er begrænset og strengt voksende, kan vi definere $a = \lim_{t\to-\infty} f(t)$ og $b = \lim_{t\to\infty} f(t)$ som tidligere.

Funktionen f afbilder så $\mathbb{R}$ bijektivt over på intervallet (a, b). Lad $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ være invers til f.

Fordi f er C^1 og $f'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, vil g også være C^1, og $g'(x) = 1/f'(g(x)) > 0$ for alle $a < x < b$. Vi definer dernæst en funktion $\eta\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\eta(x) := \frac{1}{g'(x)} = f'(g(x)).$$

Funktionen η er tydeligvis kontinuert på (a, b), og idet f er C^2 får vi endda

$$\eta'(x) = f''(g(x)) \cdot g'(x).$$

Det ses at η' er kontinuert, så η er i det mindste C^1 på intervallet (a, b). Nu skal vi "bare" udvide η til resten af $\mathbb{R}$.

Nu kommer antagelserne om grænseværdier i spil, for når x går mod a eller b, vil $g(x)$ går mod henholdsvis $-\infty$ og ∞. Der gælder derfor at

$$\eta(x) = f'(g(x)) \to 0 \text{ for } x \to a, b$$

$$\eta'(x) = f''(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{f''(g(x))}{f'(g(x))} \to \begin{cases} c \\ d \end{cases} \quad \text{for } x \to \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

hvor c og d er reelle tal. Vi kan således udvide η til en C^1-funktion v på hele $\mathbb{R}$:

$$v(x) := \begin{cases} c \cdot (x - a) & \text{for } x \le a, \\ \eta(x) & \text{for } a < x < b, \\ d \cdot (x - b) & \text{for } x \ge b. \end{cases}$$

Af de udregninger vi allerede har lavet, ses at $f'(t) = \eta(f(t)) = v(f(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.