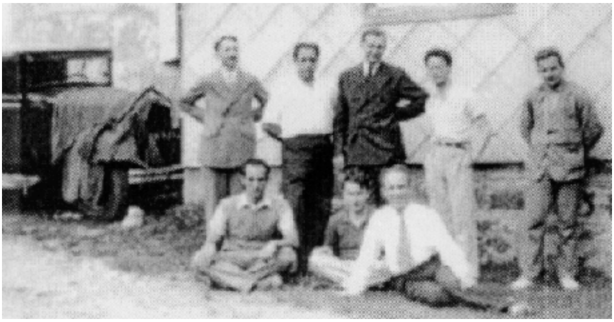
Nicolas Bourbaki

Dan Saattrup Nielsen

I blokkens matematiker tager vi et kig på matematikere, hvis navne måske er dukket op hist og her, men personen bag navnet nok ikke er så kendt blandt mange. Lidt hyggelæsning!

Nicolas Bourbaki er en matematiker, som nogle måske har hørt om. Han har skrevet bøger om (blandt andet) algebra, topologi, mængdelære, kommutativ algebra, Lie teori og spektralteori. Han har derudover opfundet en god sjat af vores matematiske sprog, som f.eks. surjektiv, injektiv, bijektiv og symbolet $\emptyset$. Det lyder jo som en forbløffende alsidig person! Hvis du tænker at det må være for godt til at være sandt, så har du ret - for Nicolas Bourbaki har aldrig eksisteret. Nicolas Bourbaki er i stedet et alias for en dengang hemmelig gruppe af franske matematikere. Hvorfor var gruppen hemmelig? Hvem bestod den af? Lad os prøve at dykke ned i år 1934 på Café A. Capoulade i Paris, hvor ni færdiguddannede matematikere, alle under 30 år, holdte deres første møde.

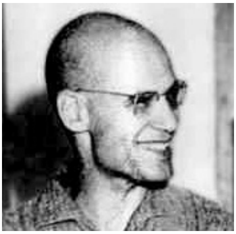
Otte ud af de ni matematikere kom fra l'École Normale Supérieure (ENS), som var et universitet blandt Grandes Écoles, der var en elitær samling af de bedste universiteter i Frankrig. På ENS var fagene opdelt i videnskaberne og humaniora, hvor der kun blev optaget hhv. 30 og 20 studerende årligt. Her studerede man i tre år, hvor det tredje år var dedikeret til at forberede en på at være lærer. Altså underviste de fleste af vores ni matematikere, og i løbet af deres undervisning var de blevet enige om, at litteraturen indenfor matematisk analyse i Frankrig var håbløs, og at de gerne ville skrive et bedre alternativ. De kaldte dem selv for Komitéen for Skrivningen af et Værk om Analyse.



Bourbakis første kongres, juli 1935

På mødet blev det foreslået at omfanget af deres værk maksimalt skulle være på 1000-1200 sider og at de første bøger skulle være færdige indenfor et halvt år. De startede med at planlægge det præcise indhold i bøgerne, som de var enige om skulle være så moderne som muligt, men det første møde var, forståeligt nok, ikke langt nok til at diskutere dette til ende. De fortsatte med at mødes hver anden uge på selvsamme café i et halvt års tid, hvorefter de skiftede til at holde kongresser. På dette tidspunkt havde der allerede været flere nyankomne og flere, som var smuttet. For at være konsistente, besluttede de sig at give gruppen et fælles navn, der skulle være eneste forfatter på deres fremtidige bøger. Det navn var Bourbaki.

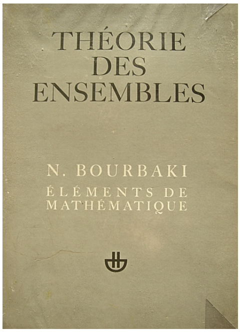
De fandt hurtigt ud af, at deres projekt var mere omfattende end hvad de først havde forventet. De havde jo den her idé med, at det skulle være så moderne som muligt, men samtidig så tilgængeligt som muligt. Den skulle være læselig af forskere, lærere, fysikere og ingeniører. Det forudsatte jo, at al baggrundsviden skulle være dækket! De lagde derfor, meget optimistisk, ud med mængdelæren. Mængdelæren var jo fundamentet for al matematik, deriblandt analyse, så det var jo helt umuligt ikke også at skulle dække det. Men de strukturer man arbejder i i analysen måtte jo også være dækket, før man kunne begynde på analysen - dette krævede pludselig bøger om de forskellige algebraiske strukturer samt topologi. De forventede nu pludselig at deres værk ville fylde ca. 3200 sider - allerede en tredobling af hvad de først havde snakket om!



Grothendieck, skaberen af moderne algebraisk geometri, var også medlem af Bourbaki

De fortsatte med at holde tre kongresser om året, som varede en uges tid med 7-8 timers dagligt arbejde, hvor de gjorde status på deres skriveproces samt diskuterede hvad der manglede. Det lyder umiddelbart meget sobert og professionelt, men tonen var nok det modsatte af hvad man ville forvente til en sådan kongres. Imens de skrevne kapitler blev fremlagt, haglede det ned med højtråbende tilsvininger og vittigheder, der gjorde at gruppen blev kaldt for "en flok sindssyge!". Dette medførte også hyppige udskiftninger i gruppen. Dog kunne enhver ikke bare blive medlem af denne lukkede klub. Man blev inviteret til en kongres som "guinea pig", kastet ind i de højtråbende diskussioner. Hvis man ikke aktivt deltog i disse, og blot sad stille, var man ikke velkommen. Derudover forlod folk også ofte gruppen, når de fik for meget af det vilde fællesskab, eller hvis de blev for gamle - det var nemlig en regel i gruppen, at du skulle forlade den, når du fyldte 50 år.

Hvis du var en af de heldige, der blev optaget i fællesskabet, måtte ingen udefrakommende nogensinde få det at vide. Selv hvor og hvornår deres kongresser blev holdt skulle ingen vide, der ikke var indlemmet i den lukkede klub. Laurent Schwartz, en tidligere Bourbakirekrut udtalte blandt andet at “Når jeg blev spurgt om jeg var medlem af Bourbaki sagde jeg altid nej. Hvis jeg ikke var medlem, talte jeg sandt, og hvis jeg var medlem, skulle jeg sige nej alligevel”. Grunden til alt dette hemmelighedskræmmeri var en politisk en af slagsen, for de gik ind for fællesskabet som en samlet enhed, og de enkelte medlemmer skulle derfor ikke fremhæves. Det var altid set som et fælles projekt.



Bourbakis bog om mængdelære

Noget af et projekt var det også. Selvom det var en kaotisk gruppe, der var i gang med at udføre noget der virker som tæt på umuligt, var det alligevel utrolig produktivt. Enhvert kapitel var ikke godkendt, før *alle* i gruppen var enige om det. Alligevel sprang de endnu engang deres sidetalsestimat, og de nåede op på over 7000 sider! Man skulle tro at et værk indenfor analyse godt kunne dækkes på under 7000 sider, men dette fundamentale mål blev ikke opnået. Langt nåede de dog, og på deres vej bidrog de med op til flere dengang standardbøger indenfor flere forskellige matematiske discipliner. De må også have mærket hvilket indtryk deres værk ville give, da de opkaldte den efter Euklids Elementer: "Éléments de Mathématique".

Litteratur

[1] Mashaal, Maurice. *Bourbaki - A Secret Society of Mathematicians*. American Mathematical Society, 2006.

Meditation over Midterbinomialkoefficienten

– En rusrejse fra en fjern juletid

Frederik Ravn Klausen, Peter Michael Reichstein Rasmussen

Ved juletid for ikke så længe siden faldt tre russer over et åbent problem.

Formodning 1 Midterbinomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$ er altid delelig med 4 eller 9 for $n \geq 4$ bortset fra $n = 64$ og $n = 256$.

I deres rusnaivitet så det ud til at være et sødt lille problem, som man hurtigt kunne løse. Et lille krydderi til julestemningen. Snart kunne de dog konstatere at dette ikke var tilfældet, men undervejs i arbejdet med formodningen dukkede sjov matematik frem. Dette er historien om deres rejse.

Rejsen indebærer flere hyggelige vandringer i talteoriens og kombinatorikkens snedækkede landskaber, som efter forfatternes anbefaling bør nydes foran en åben pejs.

Indledende julekagebagning

Notation 2 For $a, p \in \mathbb{N}$ og $p > 1$ skriver vi[4] $p^k \mid\mid a$, hvis k er det største heltal således at $p^k \mid a$.

Notation 3 Lad $a, b \in \mathbb{N}$ være givet med $b > 1$. Da betegner $(a)_b$ tallet a skrevet i base b, og a_b betegne at a *er* skrevet i base b.

I det følgende vil vi lege lidt med menter. Disse skal opfattes, som man lærte det, da man var en lille pebernødsgnaskende folkeskoleelev. Eksempelvis vil der komme to menter, når man lægger 1 til 99.

[4] Hvor $\mathbb{N}$ naturligvis ikke indeholder 0.

Sætning 4 (Kummers sætning) *Der gælder* $p^k \mid\mid \binom{m+n}{m}$*, hvis og kun hvis der er netop* k *menter i additionen* $(n)_p + (m)_p = (n+m)_p$*.*

Bevis. Beviset og matematikken bag er rigtig fin, og kan for eksempel findes i [1]. Alternativt kan den entusiastiske læser se sætningen som en opbyggelig opgave. □

Eksempel 5 Hvis vi betragter $\binom{16}{8}$, så er 8 skrevet i base 3 givet ved $22_3 = (8)_3$, og i additionen $(8)_3 + (8)_3 = 22_3 + 22_3 = 121_3 = (16)_3$ sker der 2 menter. Det vil sige at $3^2 \mid\mid \binom{16}{8}$.

Russerne så, at Kummers sætning straks indskrænker det oprindelige problem til et spørgsmål om at vise, at der ikke findes $k > 2$ så $9 \nmid \binom{2^{k+1}}{2^k}$ bortset fra $k = 6, 8$. Dette overlades ligeledes til læseren som en (noget nemmere) opgave.

På trods af reduktionen af problemet var det dog stadig for hård en julenød for de unge russer, der i stedet betragtede følgende funktion:

Definition 6 For alle $a \in \mathbb{N}$ defineres

$$\mathcal{T}_9(a) = \#\left\{0 \leq k < a \mid 9 \nmid \binom{2^{k+1}}{2^k}\right\}.$$

Denne nye funktion kunne altså tælle antallet af modeksempler til Formodning 1 mindre end 2^a. Et øvre estimat af funktionen blev derfor vore heltes mål.

Ved hjælp af Kummers sætning kan en gæv rus benytte fordelingen af cifre i $(2^k)_3$ for et generelt k til at sige noget om antallet af gange 3 deler $\binom{2^{k+1}}{2^k}$. Det vil da vise sig at de sidste t cifre af $(2^k)_3$ er periodiske med hensyn til k med periode $2 \cdot 3^{t-1}$. Da hver periode desuden kommer til at indeholde alle mulige kombinationer af t cifre i base 3, hvor det sidste ciffer enten er 1 eller 2, fås et stærkt redskab.

Dette var det første russerne satte sig ud for at vise.

Definition 7 Eulers phi-funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er defineret som

$$\varphi(n) = \#\{1 \leq a < n \mid \gcd(a, n) = 1\}.$$

Sætning 8 (Euler-Fermat) *For alle indbyrdes primiske tal $a, b \in \mathbb{N}$ gælder*

$$a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}.$$

Bevis. Se [1, s. 133]. □

Lemma 9 *For $k \geq 0$ gælder $3^{k+1} \mid\mid 2^{2\cdot 3^k} - 1$.*

Bevis. Beviset føres ved induktion. For $k = 0$ og $k = 1$ får vi henholdsvis

$$3^1 \mid\mid 2^2 - 1 = 3 \text{ og } 3^2 \mid\mid 2^{2\cdot 3^1} - 1 = 63,$$

hvilket er sandt. Antag nu at

$$3^{k+1} \mid\mid 2^{2\cdot 3^k} - 1.$$

for et vilkårligt $k > 0$. Benyt nu følgende faktorisering:

$$2^{2\cdot 3^{k+1}} - 1 = \left(2^{2\cdot 3^k} - 1\right) \cdot \left(\left(2^{2\cdot 3^k}\right)^2 + 2^{2\cdot 3^k} + 1\right).$$

Vi bemærker nu, at

$$2^{3^k} \equiv \left(2^3\right)^{3^{k-1}} \equiv (-1)^{3^{k-1}} \equiv -1 \pmod{9},$$

hvorved vi har

$$\left(2^{2\cdot 3^k}\right)^2 + 2^{2\cdot 3^k} + 1 \equiv (-1)^4 + (-1)^2 + 1 \equiv 3 \pmod 9.$$

Dermed gælder $3 \mid\mid \left(2^{2\cdot 3^k}\right)^2 + 2^{2\cdot 3^k} + 1$, og da $3^{k+1} \mid\mid 2^{2\cdot 3^k} - 1$, så får vi

$$3^{k+2} \mid\mid \left(2^{2\cdot 3^k} - 1\right) \cdot \left(\left(2^{2\cdot 3^k}\right)^2 + 2^{2\cdot 3^k} + 1\right) = 2^{2\cdot 3^{k+1}} - 1.$$

□

Definition 10 Lad $a, b \neq 1$ være indbyrdes primiske positive heltal. Da defineres ordenen $\mathrm{ord}_a(b)$ til at være det mindste positive heltal t så $b^t \equiv 1 \pmod a$.

I julelys og måneskin kan det ses, at $b^r \equiv 1 \pmod a$ hvis og kun hvis $\mathrm{ord}_a(b) \mid r$.

Lemma 11 *Lad $k \geq 0$ og $0 < s < 2 \cdot 3^k$. Da gælder*

$$2^s \not\equiv 1 \pmod{3^{k+1}}.$$

Bevis. Lad $t := \mathrm{ord}_{3^{k+1}}(2)$. Vi viser nu, at $t = 2 \cdot 3^k$. Vi har allerede $t \leq 2 \cdot 3^k$, idet $t \mid \varphi(3^{k+1}) = 2 \cdot 3^k$ jævnfør Sætning 8.

Antag nu for modstrid, at $t < 2 \cdot 3^k$. Da må der enten gælde $t \mid 3^k$ eller $t \mid 2 \cdot 3^{k-1}$. Da vi har

$$2^{3^k} \equiv 2 \pmod 3,$$

så er den første mulighed udelukket. Yderligere følger det af Lemma 9, at $3^k \mid\mid 2^{2\cdot 3^{k-1}} - 1$, og derfor må der gælde

$$2^{2\cdot 3^{k-1}} \not\equiv 1 \pmod{3^{k+1}},$$

så $t \nmid 2 \cdot 3^{k-1}$. Dette er i modstrid med antagelsen, og derfor gælder $\mathrm{ord}_{3^{k+1}}(2) = 2 \cdot 3^k$. □

Denne appetitvækkende julegodte viser altså, at $2 \cdot 3^{k-1}$ er den minimale periode for de k sidste cifre af $(2^k)_3$:

Sætning 12 *Lad k, l være givet, så $0 \leq k < l < 2 \cdot 3^t$. Da gælder $2^k \not\equiv 2^l \pmod{3^{t+1}}$. Det vil sige, at de $t+1$ sidste cifre af $(2^k)_3$ og $(2^l)_3$ er forskellige.*

Bevis. Antag for modstrid at $2^k \equiv 2^l \pmod{3^{t+1}}$. Så gælder $3^{t+1} \mid 2^l - 2^k = 2^k(2^{l-k} - 1)$, men dette er i modstrid med Lemma 11, da det medfører $3^{t+1} \mid 2^{k-l} - 1$ for $0 < l - k < 2 \cdot 3^t$. □

Sætning 13 *For vilkårligt $k \in \mathbb{N}_0$ får man samtlige følger af $k+1$ cifre med 1 eller 2 på den sidste plads og 0, 1 eller 2 på de andre, når man betragter de sidste $k+1$ cifre af $(2^n)_3$ for n så $0 \leq n < 2 \cdot 3^k$.*

Bevis. De mulige følger på ovenstående form kan vælges på $2 \cdot 3^k$ måder. Videre ses det, at da det sidste ciffer af $(2^n)_3$ altid vil være enten 1 eller 2, så er de sidste $k+1$ cifre altid på denne form. Til sidst følger det af Sætning 12 at alle disse sekvenser af de første $k+1$ cifre af $(2^n)_3$ er forskellige, og da der er $2 \cdot 3^k$ af disse, følger sætningen. □

Densitet af trinære julegodter

Med juletræet forsvarligt pyntet med en præcis beskrivelse af opførelsen af de sidste cifre i $(2^k)_3$ og med en passende mængde småkager ved hånden, begyndte udpakningen af julegaverne; et estimat af funktionen $\mathcal{T}_9$ var indenfor rækkevidde.

Sætning 14 *Lad $t \geq 0$. Da gælder*

$$\mathcal{T}_9(2 \cdot 3^t) \leq 2^{t-1} \cdot (t+4)$$

Bevis. Det følger af Kummers sætning, at 9 ikke deler $\binom{2^{k+1}}{2^k}$ hvis og kun hvis additionen $(2^k)_3 + (2^k)_3 = (2^{k+1})_3$ indebærer færre end to menter. For hvert eneste 2-tal i $(2^k)_3$ forekommer der en mente i additionen, og altså vil 9 dele $\binom{2^{k+1}}{2^k}$ hvis der er to eller flere 2-taller i $(2^k)_3$. [5]

Ved Sætning 13 vil de sidste $t+1$ cifre af $(2^k)_3$ antage alle kombinationer, hvor det sidste ciffer er 1 eller 2 og de andre er 0, 1 eller 2, når $0 \leq k < 2 \cdot 3^t$. Vi vil tælle, hvor mange af disse kombinationer som indeholder færre end to 2-taller. Der er to tilfælde:

Ingen 2-taller: Der er 2^t kombinationer af de sidste $t+1$ cifre, så de ikke indeholder nogen 2-taller, da det sidste ciffer må være 1 og de andre enten er 0 eller 1.

Netop ét 2-tal: Antallet af måder, hvorpå de sidste $t+1$ cifre kan indeholde præcis ét 2-tal kan findes på følgende måde. Hvis det sidste ciffer er et 2-tal, så er der 2^t forskellige måder de resterende cifre kan fordeles. Hvis det sidste ciffer er 1, så må et af de t cifre være et 2-tal, og de resterende kan antage værdierne 0 eller 1 på 2^{t-1} måder. Dermed er der $2^t + t2^{t-1}$ kombinationer, som opfylder dette.

[5] Læseren, der endnu ikke er påvirket af juleøl, vil her bemærke, at man kan opnå bedre resultater ved også at kigge på menter fra et-taller. Det vil vi i denne fremstilling afholde os fra.

Det vil sige, at der ialt maksimalt er $2^t + 2^t + t2^{t-1} = 2^{t-1}(t+4)$ tal $0 \leq k < 2 \cdot 3^t$ således at $(2^k)_3$ giver mindre end to menter, når den lægges til sig selv i base 3. Dermed fås det ønskede estimat. □

Med denne gave godt udpakket kan vi nu få et generelt estimat:

Sætning 15 *For et vilkårligt $a \in \mathbb{N}$ gælder*

$$\mathcal{T}_9(a) \leq a^{\log_3(2)} \left(\log_3(a) + 5\right).$$

Bevis. Lad t være givet, så $2 \cdot 3^t \leq a < 2 \cdot 3^{t+1}$. Da har vi

$$t \leq \log_3(a) - \log_3(2).$$

Da $\mathcal{T}_9$ oplagt er en voksende funktion, så kan vi vurdere[6] $\mathcal{T}_9(a)$ ved Sætning 14:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_9(a) &\leq \mathcal{T}_9\left(2 \cdot 3^{t+1}\right) \\
&\leq 2^t \cdot (t+5) \\
&\leq 2^{\log_3(a) - \log_3(2)} \left(\log_3(a) - \log_3(2) + 5\right) \\
&\leq 2^{\log_3(a)} \left(\log_3(a) + 5\right) \\
&= a^{\log_3(2)} \left(\log_3(a) + 5\right).
\end{aligned}$$

□

Russerne kunne nu bruge dette estimat til at sige noget om, hvor ofte Formodning 1 fejler. Eller med andre ord: densiteten af de bløde pakker blandt midterbinomialkoefficienterne.

[6] Igen vil den opmærksomme læser bemærke, at vi for overskuelighedens skyld smider mere væk end julemanden i Bamses Julerejse.

Definition 16 Densiteten af en mængde $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ defineres som grænsen

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_{a\to\infty} \frac{\#(\mathcal{A} \cap \{1, 2, \cdots, a\})}{a}.$$

Korollar 17 *Lad $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ være mængden af naturlige tal k, som opfylder $9 \nmid \binom{2^{k+1}}{2^k}$. Da er $\rho(\mathcal{R}) = 0$.*

Bevis. Vi ser at $\frac{\mathcal{T}_9(a)}{a} \leq \frac{\log_3(a)+5}{a^{1-\log_3(2)}}$, og da

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\log_3(a) + 5}{a^{1-\log_3(2)}} = 0,$$

er $\rho(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to\infty} \frac{\mathcal{T}_9(a)}{a} = 0$. □

Juletræets grønne top

Nu kunne den pejsedøsige læser fristes til at tro at juleeventyret slutter her, men russerne fortsatte ufortrødent.

Definition 18 For ulige $m \in \mathbb{N}$ lader vi:

$$\mathcal{T}_m(a) = \# \left\{ 0 \leq s < a \mid m \nmid \binom{2^{s+1}}{2^s} \right\}$$

Denne funktion var lidt sværere at knække, men efter lang tids terningekasten skaffede russerne sig følgende julegave i matematikkens store pakkeleg:

Sætning 19 *Lad $m > 1$ være ulige og lad p være det største primtal, der deler m. Da gælder $\mathcal{T}_m(a) = o\left(a^{\log_p(\frac{p+1}{2})+\epsilon}\right)$ for ethvert $\epsilon > 0$.*

Denne sætning blev vist, da juletiden var ved at gå på hæld og russerne lå og lavede sneengle på de salige idrætsstuderendes tilsneede spydkastmark. Her åbenbarede Herrens (eller Erdős' eller læserens yndlingsmatematikers) engle sig for dem, og de så, at man for vilkårligt $\alpha \in \mathbb{N}$ og primtal p kunne udvælge indekser i cifrene af $(\alpha^k)_p$ så samtlige "mulige" følger af cifre fremkommer ved disse indekser.[7]

Dette kunne russerne bruge. De styrtede ind til den nærmeste tavle og med samme teknik som i tilfældet $\alpha = 2$ lykkedes det dem at sikre resultatet. Glade og tilfredse løb de ned til kagesøster og varm kakao.

Det var nu blevet en rigtig jul.

Litteratur

[1] R. L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 2011.

[7] Interesserede læsere er meget velkomne til at kontakte forfatterne.

Hvad viser klokken?
– præmieopgave, 24. årgang nr. 2

Så er præmieopgaven tilbage igen! Som sædvanlig lyder præmien på et gavekort på 100 kr til GAMES.

Betragt et ur, hvor vi ser bort fra mekanikken og antager, at time og minutviser går på kontinuert vis. Hvor mange forskellige klokkeslæt findes der, hvor man kan ombytte time og minutviser og stadig vise noget gyldigt?
For eksempel får vi ikke et gyldigt klokkeslæt, når vi ombytter time- og minutviser kl. $05:00$*, da timeviseren ikke kan stå på præcist* 12*, når klokken er* 25 *over.*

Vinderen udtrækkes fra mængden af de besvarelser, som er mere eller mindre overbevisningsdygtige.

Farvel til ekstraopgaven

Mange tak til de flittige korrespondenter (særligt shoutout til Sune og Thor), der var med til at besvare *Blokkens Ekstraopgave*. Takket være jeres færdigtexede besvarelser havde vi en artikel at se frem til i hver blok. Dog er vores portrættegner optaget, og ingen af de resterende redaktionsmedlemmer har mod på at tegne Sune – de første to potrætter var så flotte, at tredje gang kun kan blive en skuffelse. Vi siger derfor farvel til ekstraopgaven for denne gang...

FAMØS

FAMØS Dec 2014
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Jing (Question Marc)
Deadline for næste nummer:
1. marts 2015

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til redaktion@famosweb.org – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.famosweb.org

Oplag: 300 stk.
Tryk: Frydenberg A/S ISSN: 1395-2145

24. årgang, nr. 1, Dec 2014